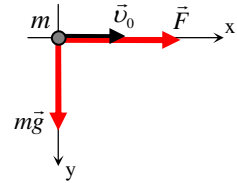


### Επιτάχυνση στην καμπυλόγραμμη κίνηση

(Για μαθητές που έχουν διδαχθεί την κεντρομόλο.)

Σώμα μάζας  $m = 2 \text{ kg}$  έχει κάποια στιγμή οριζόντια ταχύτητα μέτρου  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  και οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό είναι το βάρος του και μια οριζόντια δύναμη μέτρου  $F = 15 \text{ N}$ .

Η επιτάχυνση λόγω βαρύτητας είναι  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Τη στιγμή αυτή,



1) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος είναι:

- α)  $7,5 \text{ m/s}^2$                       β)  $10 \text{ m/s}^2$                       γ)  $12,5 \text{ m/s}^2$

2) ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του σώματος είναι:

- α)  $7,5 \text{ m/s}^2$                       β)  $10 \text{ m/s}^2$                       γ)  $12,5 \text{ m/s}^2$

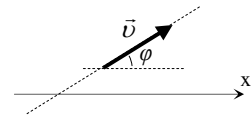
3) ο ρυθμός μεταβολής της διεύθυνσης της ταχύτητας του σώματος έχει μέτρο:

- α)  $1 \text{ rad/s}$                       β)  $10 \text{ rad/s}$                       γ)  $7,5 \text{ rad/s}$

(Το 3<sup>ο</sup> ερώτημα είναι δυσκολότερο και προαιρετικό.)

#### ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η ταχύτητα  $\vec{v}$  ενός σώματος, ως διάνυσμα, έχει **μέτρο** και **διεύθυνση**. Η διεύθυνσή της μπορεί να προσδιοριστεί και μέσω της γωνίας  $\varphi$  που σχηματίζει ο φορέας της με κάποιο άξονα.



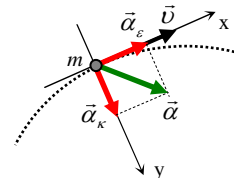
Όπως γνωρίζουμε, αν στο σώμα ασκείται δύναμη συγγραμμική με την ταχύτητα, τότε μεταβάλλεται μόνο το μέτρο της ταχύτητας. Το σώμα αποκτά τότε επιτάχυνση επί της τροχιάς του, την επιτρόχια επιτάχυνση  $\vec{a}_\epsilon$ .

Αν πάλι ασκείται δύναμη κάθετη στην ταχύτητα τότε μεταβάλλεται μόνο η διεύθυνση της ταχύτητας. Το σώμα αποκτά τώρα επιτάχυνση κάθετη στην ταχύτητα, την κεντρομόλο επιτάχυνση  $\vec{a}_\kappa$ .

Στη γενικότερη περίπτωση, η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση αποτελούν τις συνιστώσες της επιτάχυνσης  $\vec{a}$  του σώματος, παράλληλα και κάθετα στην ταχύτητα.

Ο 2<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα,  $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ , μπορεί να γραφτεί και αλγεβρικά κατά άξονα:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_\epsilon \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = m \cdot a_\kappa$$



1) Στην ερώτηση αυτή, το ζητούμενο είναι «το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας,  $\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$ » του σώματος, δηλαδή το μέτρο της επιτάχυνσής του:  $\left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = |\vec{a}|$ .

Σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> νόμο:

$$\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} \rightarrow |\vec{a}| = \frac{|\Sigma \vec{F}|}{m} = \frac{\sqrt{F^2 + (mg)^2}}{m} = 12,5 \text{ m/s}^2$$

Σωστή απάντηση η (γ).

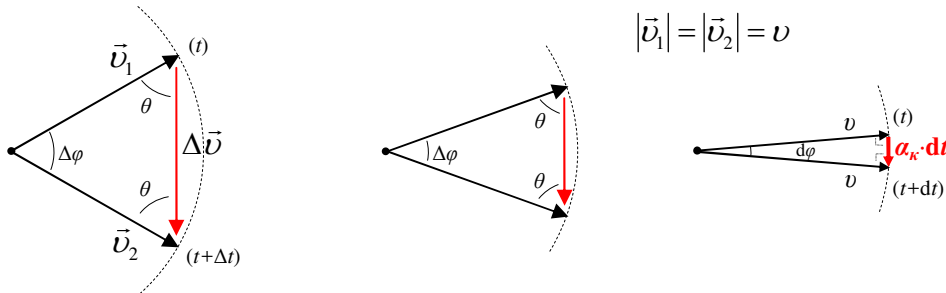
2) Στην ερώτηση αυτή, το ζητούμενο είναι «ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας,  $\frac{d|\vec{v}|}{dt}$ » του σώματος. Μας ενδιαφέρει δηλαδή μόνο η μεταβολή του μέτρου και όχι του διανύσματος της ταχύτητας. Μα το μέτρο το μεταβάλλουν μόνο οι συγγραμμικές με την ταχύτητα δυνάμεις. Ζητάμε επομένως το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης:  $\frac{d|\vec{v}|}{dt} = |\vec{a}_\epsilon|$ . Οπότε:

$$\vec{a}_\epsilon = \frac{\Sigma \vec{F}_x}{m} \rightarrow |\vec{a}_\epsilon| = \frac{|\Sigma \vec{F}_x|}{m} = \frac{F}{m} = 7,5 \text{ m/s}^2$$

Σωστή απάντηση η (α).

3) Στην τελευταία ερώτηση ζητείται το μέτρο του «του ρυθμού μεταβολής της διεύθυνσης της ταχύτητας» του σώματος. Πόσο γρήγορα μεταβάλλεται δηλαδή η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα με κάποιο άξονα,  $\left| \frac{d\phi}{dt} \right|$ .

Ας υποθέσουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό και μεταβάλλεται μόνο η διεύθυνσή της. Σε χρόνο  $\Delta t$  θα έχει στραφεί κατά γωνία  $\Delta\phi$ . Το διάνυσμα της μεταβολής  $\Delta\vec{v}$  σχηματίζει ίσες γωνίες  $\theta$  με τα διανύσματα  $\vec{v}_1$  και  $\vec{v}_2$  (ισοσκελές τρίγωνο, αριστερό σχήμα).



Όσο μικρότερο είναι το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  και η αντίστοιχη γωνία  $\Delta\phi$ , τόσο μεγαλύτερες γίνονται οι δύο γωνίες  $\theta$ . Για  $\Delta t \rightarrow 0$  και  $\Delta\phi \rightarrow 0$  προκύπτει  $\theta \rightarrow 90^\circ$ .

Η εμφανιζόμενη μεταβολή κατά τη στροφή της ταχύτητας προέρχεται επομένως από τις δυνάμεις τις κάθετες σ' αυτήν και θα είναι ίση με  $\alpha_\kappa \cdot dt$ , όπου  $\alpha_\kappa$  το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Επίσης, η μεταβολή  $\alpha_\kappa \cdot dt$  συμπίπτει με το τόξο που διαγράφει το άκρο του διανύσματος της ταχύτητας, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε οριακά ευθύγραμμο. Οπότε:

$$\alpha_\kappa \cdot dt = v \cdot |d\phi| \rightarrow \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{\alpha_\kappa}{v} = \frac{|\Sigma \vec{F}_y|}{m \cdot v}$$

και στην περίπτωση μας:

$$\left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \frac{m \cdot g}{m \cdot v_0} = \frac{g}{v_0} = 1 \text{ rad/s}$$

Σωστή απάντηση η (α).

---

**Διονύσης Μητρόπουλος**