

Νόμος Bernoulli, Πίεση, Πυκνότητα ενέργειας και Ισχύς**Νόμος Bernoulli, Πίεση και Πυκνότητα ενέργειας**

Ο νόμος του Bernoulli για τη μόνιμη στρωτή ροή ιδανικού υγρού εκφράζει όπως γνωρίζουμε τη διατήρηση της ενέργειας.

Ο καθένας από τους τρεις όρους του σταθερού αθροίσματος εκφράζει κάποια πίεση, που μπορεί να ιδωθεί και ως πυκνότητα ενέργειας. Έτσι, η συνολική πυκνότητα ενέργειας σε κάθε σημείο της ρευματικής γραμμής παραμένει σταθερή:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{σταθ.}$$

Πιο συγκεκριμένα,

Ο 1^{ος} όρος είναι η **στατική πίεση**:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{F \cdot dx}{A \cdot dx} = \frac{dW}{dV}$$

Η στατική πίεση εκφράζει την πυκνότητα ενέργειας που οφείλεται στο γεγονός ότι το υγρό βρίσκεται υπό πίεση στο σημείο αυτό, ή αν θέλετε διαφορετικά την **πυκνότητα ροής ενέργειας** λόγω της αλληλεπίδρασης κάθε υγρού σωματιδίου με τα γειτονικά του κατά μήκος της ρευματικής γραμμής.

Ο 2^{ος} όρος είναι η **δυναμική πίεση**:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \frac{dm}{dV} v^2 = \frac{dK}{dV}$$

Η δυναμική πίεση εκφράζει την **πυκνότητα κινητικής ενέργειας**, την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου εξαιτίας της κίνησης του υγρού.

Ο 3^{ος} όρος είναι η **υψομετρική πίεση**:

$$\rho gh = \frac{dm}{dV} gh = \frac{dU}{dV}$$

Ο όρος αυτός εκφράζει δηλαδή την **πυκνότητα δυναμικής ενέργειας**, τη δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου που έχει το υγρό ως προς το επίπεδο αναφοράς.

Πυκνότητα ενέργειας και Ισχύς

Αν πολλαπλασιάσουμε έναν όρο πυκνότητας ενέργειας με την παροχή Π , το γινόμενο έχει διαστάσεις ισχύος:

$$p \cdot \Pi = \frac{dW}{dV} \frac{dV}{dt} = \frac{dW}{dt} = P$$

Έτσι, οι τρεις όροι πίεσης του νόμου Bernoulli, πολλαπλασιασμένοι με την παροχή Π σε μια διατομή, εκφράζουν αντίστοιχα τους εξής ρυθμούς ενέργειας:

$p \cdot \Pi = \frac{dW}{dt}$, τον ρυθμό με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από τη διατομή μέσω της αλληλεπίδρασης των υγρών σωματιδίων μεταξύ τους κατά τη διεύθυνση της ροής.

$\frac{1}{2} \rho v^2 \cdot \Pi = \frac{dK}{dt}$, την μεταφερόμενη ισχύ από τη διατομή λόγω της κίνησης του υγρού.

$\rho gh \cdot \Pi = \frac{dU}{dt}$, τον ρυθμό με τον οποίο μπορεί να διατίθεται δυναμική ενέργεια μέσα από τη διατομή. Αν η ροή είναι οριζόντια η δυναμική ενέργεια παραμένει διαθέσιμη, διαφορετικά μετατρέπεται σε άλλες μορφές.

Νόμος Bernoulli και παρεμβολή εξωτερικών στοιχείων στη ροή

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι παρεμβάλλονται κατά τη ροή εξωτερικά αίτια που είτε προσφέρουν στο υγρό ενέργεια, όπως π.χ. μια αντλία, είτε αφαιρούν, όπως π.χ. υδροστρόβιλοι, ή σε περίπτωση μη ιδανικού υγρού η τριβή με τα τοιχώματα του σωλήνα που προκαλεί βαθμίδα ταχύτητας και απώλειες λόγω του ιξώδους.

Κάθε τέτοιο αίτιο προκαλεί **μεταβολή στη συνολική πυκνότητα ενέργειας** του υγρού, με αποτέλεσμα να μην παραμένει αυτή σταθερή μεταξύ δύο σημείων της ροής.

Ο νόμος Bernoulli θα πρέπει να τροποποιηθεί στην περίπτωση αυτή ώστε να περιλαμβάνει τη μεταβολή της ενεργειακής πυκνότητας ανάμεσα στα δύο σημεία:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1 + \frac{dW_{\text{προσφ}}}{dV} = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2$$

ή

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1 = \frac{dW_{\text{απωλ}}}{dV} + p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2$$

Ο όρος $\frac{dW_{\text{εξ}}}{dV}$ εκφράζει την προκαλούμενη από το εξωτερικό αίτιο αύξηση ή μείωση της πυκνότητας ενέργειας και πολλαπλασιαζόμενος με την παροχή Π μας δίνει την ισχύ $P_{\text{προσφ}}$ ή $P_{\text{απωλ}}$ του εξωτερικού αιτίου.

Μερικές εφαρμογές

1. Υδροηλεκτρικό φράγμα δημιουργεί λίμνη νερού που η στάθμη της βρίσκεται σε ύψος H . Στο κάτω μέρος του φράγματος το νερό εξέρχεται οριζόντια από σωλήνα διατομής A . Θεωρώντας το νερό ιδανικό υγρό, να βρείτε τη μηχανική ισχύ που μεταφέρει κατά την εκροή του από το σωλήνα. (Δίνονται ρ , g)

Απάντηση:

Το νερό εξέρχεται από το σωλήνα με ταχύτητα $v = \sqrt{2gH}$ (Torricelli).

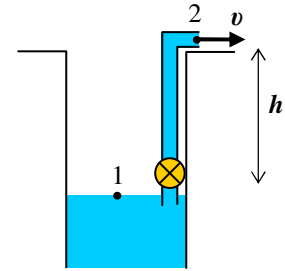
Η πυκνότητα κινητικής ενέργειας είναι $\frac{dK}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2$ και η μεταφερόμενη μηχανική ισχύς:

$$P_{μυχ} = \frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dV} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \rho v^2 \Pi = \frac{1}{2} \rho v^2 Av = \frac{1}{2} \rho Av^3$$

2. Με τη βοήθεια αντλίας, αντλούμε νερό από πηγάδι βάθους h . Το νερό εξέρχεται από το σωλήνα που έχει διατομή A , με ταχύτητα v . Να βρείτε την ισχύ της αντλίας. (Δίνονται ρ , g)

Απάντηση:

Χρησιμοποιούμε το νόμο του Bernoulli κατά μήκος ρευματικής γραμμής που ξεκινάει από σημείο 1 της επιφάνειας του νερού στο πηγάδι (με μηδενική ταχύτητα), περνάει μέσα από την αντλία (εκεί ... κουβαριάζεται λιγάκι!) και καταλήγει στην έξοδο 2 του σωλήνα, λαμβάνοντας υπ' όψιν και την προκαλούμενη αύξηση της πυκνότητας ενέργειας από την αντλία:



$$p_{ατμ} + 0 + 0 + \frac{dW_{αντλ}}{dV} = p_{ατμ} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh \rightarrow \frac{dW_{αντλ}}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh$$

Η παροχή είναι $\Pi = Av$ και η ισχύς της αντλίας προκύπτει:

$$P_{αντλ} = \frac{dW_{αντλ}}{dV} \frac{dV}{dt} = \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh \right) \Pi = \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh \right) Av$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε γενικότερα να εφαρμόσουμε τμηματικά το νόμο Bernoulli, από 1 μέχρι την είσοδο της αντλίας, και από την έξοδο έως 2, για να υπολογίσουμε τις πιέσεις και τις ταχύτητες εισόδου – εξόδου, και στη συνέχεια:

$$p_{in} + \frac{1}{2} \rho v_{in}^2 + \frac{dW_{αντλ}}{dV} = p_{out} + \frac{1}{2} \rho v_{out}^2$$

3. Οριζόντιος αγωγός μεταφοράς πετρελαίου έχει διατομή A . Λόγω ιξώδους, όταν το πετρέλαιο ρέει με ταχύτητα v , παρουσιάζονται θερμικές απώλειες ανά μονάδα μετατόπισης q . i) Να υπολογίσετε τη διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων εισόδου και εξόδου του αγωγού. ii) Ποια η απαιτούμενη μηχανική ισχύς αντλίας ώστε να αντισταθμίζονται οι θερμικές απώλειες; (Δίνεται ρ)

Απάντηση:

i) Χρησιμοποιούμε το νόμο του Bernoulli κατά μήκος ρευματικής γραμμής στο σωλήνα, που ξεκινάει από την είσοδο και καταλήγει στην έξοδο του αγωγού, λαμβάνοντας υπ' όψιν και τη μείωση της πυκνότητας ενέργειας λόγω ιξώδους:

$$p_{in} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gy = \frac{dW_{απωλ}}{dV} + p_{out} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gy \rightarrow p_{in} - p_{out} = \frac{dW_{απωλ}}{dV}$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι η απώλεια ενέργειας $dW_{απωλ}$ συνέβη σε μετατόπιση dx του πετρελαίου:

$$\frac{dW_{απωλ}}{dV} = \frac{dQ_{θερμ}}{A \cdot dx} = \frac{q}{A}$$

οπότε και:

$$p_{in} - p_{out} = \frac{q}{A}$$

ii) Η αναγκαία προσφερόμενη μηχανική ισχύς πρέπει να είναι ίση με τον συνολικό ρυθμό απωλειών. Δηλαδή:

$$P_{μηχ} = P_{απωλ} = \frac{dQ_{θερμ}}{dt} = \frac{dQ_{θερμ}}{dV} \frac{dV}{dt} = \frac{q}{A} \Pi = \frac{q}{A} Av = qv$$

Μα καλά, δεν παίζει ρόλο το συνολικό μήκος του αγωγού στη διαφορά πίεσης και στην ισχύ της αντλίας;

Ασφαλώς και παίζει ρόλο. Η ποσότητα q όμως εξαρτάται από το μήκος του αγωγού. Όσο μεγαλύτερο είναι αυτό, τόσο μεγαλύτερες είναι και οι θερμικές απώλειες για κάθε μέτρο μετατόπισης του πετρελαίου.

Διονύσης Μητρόπουλος