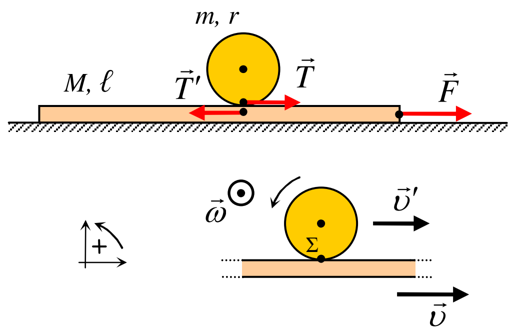
Παίζοντας με μια μπάλα πάνω σε σανίδα



Μια λεπτή σανίδα μάζας M και μήκους ℓ είναι αρχικά ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω της βρίσκεται επίσης ακίνητο ένα συμμετρικό «στρογγυλό» σώμα που το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το γεωμετρικό του κέντρο (ας το λέμε «μπάλα»), μάζας m και ακτίνας r. Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που περνάει από το κέντρο του είναι $I = \lambda \cdot m \cdot r^2$ (με $0 < \lambda \leq 1$).

Κάποια στιγμή ασκούμε στη σανίδα οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ αναγκάζοντάς τη να κινηθεί. Αν το μέτρο της δεν ξεπερνάει κάποιο όριο, τότε η μπάλα κυλάει (χωρίς να ολισθαίνει) πάνω στη σανίδα εξαιτίας της στατικής τριβής $\vec{T}$ που δέχεται στο σημείο επαφής Σ.

Η αντίδραση $\vec{T}'$ ασκείται στη σανίδα και ισχύει $\vec{T}' = -\vec{T}$.

1. Συνθήκες κύλισης (αλγεβρικά)

Η ταχύτητα του Σ θα είναι κάθε στιγμή ίση με την ταχύτητα της σανίδας και θα ισχύει:

$$\upsilon_\Sigma = \upsilon \quad \rightarrow \quad \boxed{\upsilon' + \omega \cdot r = \upsilon} \quad \textbf{(1)}$$

Επίσης:

$$\alpha_\Sigma = \alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha' + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r = \alpha} \quad \textbf{(2)}$$

2. Νόμοι του Νεύτωνα (αλγεβρικά)

Σανίδα:

$$\Sigma F = M \cdot \alpha \quad \rightarrow \quad F + T' = M \cdot a \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{F - T}{M} \quad \textbf{(3)}$$

Μπάλα:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha' \quad \rightarrow \quad T = m \cdot a' \quad \rightarrow \quad \alpha' = \frac{T}{m} \quad \textbf{(4)}$$

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \rightarrow \quad T \cdot r = \lambda \cdot m \cdot r^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \rightarrow \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r = \frac{T}{\lambda \cdot m} \quad \textbf{(5)}$$

3. Υπολογισμός της Τ και οριακές τιμές ώστε να μη συμβαίνει ολίσθηση

Αντικαθιστώντας τις (3), (4), (5) στη (2) έχουμε:

$$\frac{T}{m} + \frac{T}{\lambda \cdot m} = \frac{F - T}{M} \quad \rightarrow \quad T \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\lambda \cdot m} + \frac{1}{M} \right) = \frac{F}{M}$$

Μπορούμε να θέσουμε

$$\boxed{\frac{1}{m} + \frac{1}{\lambda \cdot m} + \frac{1}{M} = \frac{1}{\mu}} \quad \textbf{(6)}$$

Η στατική τριβή προκύπτει:

$$\boxed{T = \frac{\mu}{M} \cdot F} \quad \textbf{(7α)} \qquad \text{ή} \qquad \boxed{T = \frac{m}{m + M + \dfrac{M}{\lambda}} \cdot F} \quad \textbf{(7β)}$$

Αν $\mu_{\text{ορ}}$ είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σανίδας και μπάλας, θα πρέπει να ισχύει:

$$|T| \le \mu_{\text{ορ}} \cdot m \cdot g \quad \rightarrow \quad \boxed{|F| \le \mu_{\text{ορ}} \cdot \left(m + M + \frac{M}{\lambda} \right) \cdot g} \quad \textbf{(8)}$$

Το μέτρο δηλαδή της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$, ανεξαρτήτως φοράς, είτε μένει αυτή σταθερή είτε όχι, δεν πρέπει να ξεπερνάει την τιμή που προκύπτει από τη σχέση (8).

4. Σχέση μεταφορικών επιταχύνσεων, ταχυτήτων και μετατοπίσεων

Από τις (3), (4) και (7α) μπορούμε να υπολογίσουμε τις μεταφορικές επιταχύνσεις των δύο σωμάτων:

$$\alpha = \frac{F - T}{M} = \left(\frac{M - \mu}{M^2} \right) \cdot F \qquad \textit{και} \qquad \alpha' = \frac{T}{m} = \frac{\mu}{m \cdot M} \cdot F$$

Με διαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{m \cdot (M - \mu)}{\mu \cdot M} = m \cdot \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{M} \right) = 1 + \frac{1}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha' = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \alpha} \quad \textbf{(9)}$$

Παρατηρούμε ότι οι στιγμιαίες μεταφορικές επιταχύνσεις των δύο σωμάτων είναι ανάλογες και ο λόγος τους εξαρτάται μόνο από τον συντελεστή λ της ροπής αδράνειας του «στρογγυλού» σώματος!

Το ίδιο ισχύει προφανώς και για τις στιγμιαίες ταχύτητες, αφού τα δύο σώματα ήταν αρχικά ακίνητα. Πράγματι, με ολοκλήρωση της (9) από 0 έως *t*:

$$\int_0^t \alpha' \cdot \mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \int_0^t \alpha \cdot \mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \boxed{\upsilon' = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \upsilon} \quad \textbf{(10)}$$

Αλλά και για τις αντίστοιχες μετατοπίσεις τους:

$$\int_0^t \upsilon' \cdot \mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \int_0^t \upsilon \cdot \mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta x' = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \Delta x} \quad \textbf{(11)}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν π.χ. η μπάλα βρίσκεται αρχικά στη μπροστινή άκρη της σανίδας τότε, για να πέσει (ενώ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει) από την άλλη άκρη, πρέπει να μετατοπίσουμε τη σανίδα τουλάχιστον κατά:

$$\Delta x = \Delta x' + \ell = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \Delta x + \ell \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta x = (\lambda + 1) \cdot \ell} \quad \textbf{(12)}$$

Αν δηλαδή φροντίσουμε, μεταβάλλοντας κατάλληλα τη δύναμη $\vec{F}$ χωρίς να παραβιάζεται η σχέση (8), να σταματήσουμε τη σανίδα πριν μετατοπιστεί κατά $(\lambda+1)\cdot\ell$ τότε η μπάλα θα παραμείνει πάνω της.

5. Και μια … «πρόχειρα» στημένη σχετική άσκηση ☺

Λεπτή σανίδα μάζας M = 2 kg και μήκους ℓ = 2 m ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένη στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, σταθεράς $k = \frac{80}{7}$ N/m, που το άλλο του άκρο είναι ακλόνητο.

Στο μέσο της σανίδας είναι τοποθετημένη και ισορροπεί συμπαγής ομογενής σφαίρα ακτίνας r και μάζας $m = 3$ kg. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σανίδας και σφαίρας είναι $\mu_{ορ} = 0{,}08$.

Τραβώντας τη σανίδα κατάλληλα από το ελεύθερο άκρο της, την εκτρέπουμε αργά και οριζόντια από τη θέση ισορροπίας κατά d και τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ την αφήνουμε ελεύθερη χωρίς αρχική ταχύτητα.

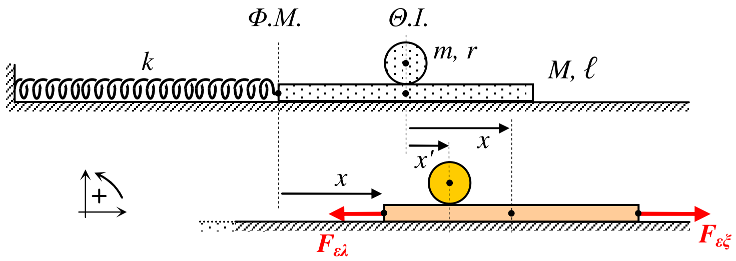
Α) Πόση μπορεί να είναι η μέγιστη απόσταση d ώστε η σφαίρα, μετά από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, να παραμένει συνεχώς πάνω στη σανίδα και να μην ολισθαίνει κατά τη διάρκεια της κίνησης;

Β) Για την εκτροπή d της σανίδας που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, ποιο είναι το μήκος S του τμήματος της σανίδας που έρχεται μετά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ σε επαφή με τη σφαίρα; Πόσος χρόνος απαιτείται για να διανύσει η σφαίρα το μήκος αυτό;

(Δίνονται: $g = 10$ m/s² , $I = \frac{2}{5}\cdot m\cdot r^2$)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Έστω ότι μετατοπίζουμε τη σανίδα από τη θέση ισορροπίας προς τα δεξιά, ασκώντας δύναμη $F_{εξ}$. Το ελατήριο επιμηκύνεται ασκώντας δύναμη $F_{ελ}$.



Εφόσον η μετατόπιση γίνεται αργά, το μέτρο F του αλγεβρικού αθροίσματος των δύο αυτών δυνάμεων θα είναι μικρό, θα ικανοποιείται επομένως η συνθήκη (8).

Η σφαίρα θα κυλίεται χωρίς ολίσθηση αντίθετα από τη φορά του ρολογιού. Αρχικά απέχει από το αριστερό άκρο της σανίδας απόσταση $\ell/2$ και από τη σχέση (12) προκύπτει ότι θα φτάσει σ' αυτό για μετατόπιση της σανίδας κατά $x = (\lambda+1)\cdot\ell/2$, δηλαδή (για $\lambda = \frac{2}{5}$):

$$x = 7\cdot\ell/10 = 1{,}4 \text{ m}$$

Μόλις όμως αφήσουμε τη σανίδα απομένει μόνο η $F_{ελ}$. Θα πρέπει επομένως να εξασφαλίσουμε και την ισχύ της (8):

$$\left|F_{ελ}\right| \le \mu_{ορ}\cdot\left(m+M+\frac{M}{\lambda}\right)\cdot g \quad\rightarrow\quad k\cdot|x| \le \mu_{ορ}\cdot(m+3{,}5\cdot M)\cdot g \quad\rightarrow\quad |x| \le 0{,}7 \text{ m}$$

Η μέγιστη επιτρεπτή εκτροπή της σανίδας είναι επομένως:

$$\boxed{d = x_{max} = 0{,}7 \text{ m}}$$

Από τη σχέση (11) προκύπτει ότι η αντίστοιχη εκτροπή της σφαίρας από την αρχική της θέση είναι:

$$x' = \frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot x = \frac{2}{7}\cdot x \quad\rightarrow\quad \boxed{d' = x'_{max} = 0{,}2 \text{ m}}$$

(Στη θέση αυτή απέχει δηλαδή $d - d' = 0{,}5$ m από το κέντρο της σανίδας.)

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι, μετά τη στιγμή $t_0 = 0$, τόσο η σανίδα όσο και το CM της σφαίρας εκτελούν ΓΑΤ, με πλάτη $A = d = 0{,}7$ m και $A' = d' = 0{,}2$ m αντίστοιχα. Έτσι το μέτρο της μετατόπισης της σανίδας δεν ξεπερνάει ποτέ το όριο των 0,7 m.

Πράγματι:

Η σφαίρα στην οριζόντια διεύθυνση δέχεται τη στατική τριβή T που από (7β) προκύπτει:

$$T = \frac{m}{m + M + \frac{M}{\lambda}} \cdot F_{\varepsilon\lambda} \quad \rightarrow \quad T = 0{,}3 \cdot F_{\varepsilon\lambda}$$

Θέτοντας $F_{\varepsilon\lambda} = -k \cdot x = -\frac{80}{7} \cdot x$ (SI) και $x = \frac{7}{2} \cdot x'$ έχουμε:

$$T = -\frac{24}{7} \cdot x \quad ή \quad \boxed{T = -12 \cdot x'} \quad \text{(SI)}$$

Στη σανίδα ασκούνται οριζόντια οι δυνάμεις $T' = -T$ και $F_{\varepsilon\lambda}$, οπότε:

$$F_{o\lambda} = F_{\varepsilon\lambda} + T' = F_{\varepsilon\lambda} - T = -\frac{80}{7} \cdot x + \frac{24}{7} \cdot x \quad \rightarrow \quad \boxed{F_{o\lambda} = -8 \cdot x} \quad \text{(SI)}$$

Είναι εμφανές ότι οι περίοδοι των δύο κινήσεων συμπίπτουν, αφού η κυκλική συχνότητα ω' είναι ίδια:

$$\omega' = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2\ r/s$$

Εξάλλου, είχαμε δει στη (10) ότι οι στιγμιαίες ταχύτητες των δύο σωμάτων είναι ανάλογες, οπότε θα μηδενίζονται ταυτόχρονα.

B) Οι μηδενισμοί της ταχύτητας γίνονται στις δύο ακραίες θέσεις.

Είδαμε ότι στην αρχική (ακραία) θέση η σφαίρα βρίσκεται 0,5 m αριστερά από το κέντρο της σανίδας. Στην άλλη ακραία θέση θα βρίσκεται λόγω συμμετρίας 0,5 m δεξιά από το κέντρο της σανίδας. Θα έχει επομένως μετατοπιστεί πάνω στη σανίδα κατά $\boxed{S = 1\ \text{m}}$.

Ο αντίστοιχος χρόνος που απαιτείται είναι προφανώς μισή περίοδος:

$$\Delta t = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega'} \quad ή \quad \boxed{\Delta t = 1{,}57\ \text{sec}}$$

Διονύσης Μητρόπουλος