# Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής

***Εννοιολογικό πλαίσιο και παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση της εφαρμογής του στην επίπεδη κίνηση υλικού σημείου και στερεού σώματος***

## ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

### Εισαγωγή

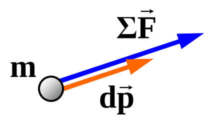
Η έννοια της δύναμης, της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα σώματα, είναι θεμελιώδης στη Νευτώνεια μηχανική.

Ο 1ος νόμος του Νεύτωνα ουσιαστικά διασφαλίζει την ύπαρξη των αδρανειακών συστημάτων.

Μέσω του 2ου νόμου θεμελιώνεται η έννοια της δύναμης και καθιερώνεται η αδρανειακή μάζα ως ποσοτικό μέτρο της αδράνειας ενός σώματος. Ως προς ένα αδρανειακό σύστημα, αν δύο απομονωμένα από το περιβάλλον σώματα $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους (π.χ. συνδεδεμένα με ένα ελατήριο), παρατηρούμε ότι αποκτούν αντίρροπες επιταχύνσεις με μέτρα αντιστρόφως ανάλογα προς τις μάζες τους: $\dfrac{|\vec{\alpha}_1|}{|\vec{\alpha}_2|} = \dfrac{\mathbf{m_2}}{\mathbf{m_1}}$. Το αποτέλεσμα δηλαδή της αλληλεπίδρασής τους περιγράφεται από τη σταθερή τιμή του γινομένου $\mathbf{m}|\vec{\alpha}|$. Το γινόμενο αυτό περιγράφει μια *μεταβολή στην κίνηση* ως συνέπεια της αλληλεπίδρασης και αποτελεί τον ορισμό της δύναμης $\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\vec{\alpha}$ ή, γενικότερα, με όρους ορμής $\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{dt}} = \dfrac{\mathbf{d}(\mathbf{m}\vec{\upsilon})}{\mathbf{dt}}$.

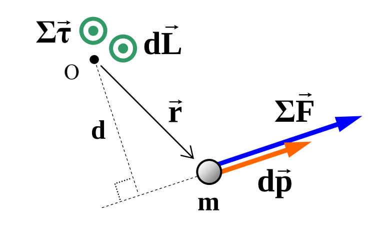
### Α) Υλικό σημείο

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για υλικό σημείο διατυπώνεται στη γενικευμένη μορφή του ως εξής:

| | |
|---|---|
| *«Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η ορμή υλικού σημείου είναι ανάλογος με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό και η μεταβολή συμβαίνει προς την κατεύθυνσή της».* |   $\boxed{\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathbf{dt}}}$ **(1)** |

Ισοδύναμα, μπορούμε να εκφράσουμε τον 2ο νόμο στη γενικευμένη μορφή του, με όρους στροφορμής:

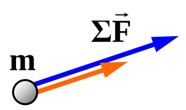
*«Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται ως προς σημείο Ο η στροφορμή υλικού σημείου είναι ανάλογος με τη συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό, ως προς το ίδιο σημείο, και η μεταβολή συμβαίνει προς την κατεύθυνσή της».*




$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{r}\times\Sigma\vec{F} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad \text{(2)}$$

Αν η μάζα του υλικού σημείου είναι σταθερή τότε $\Sigma\vec{F} = \dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{\alpha}$ οπότε:

*«Η επιτάχυνση* $\vec{\alpha}$ *ενός υλικού σημείου μάζας* **m**, *είναι ανάλογη με τη συνισταμένη* $\Sigma\vec{F}$ *ή* $\vec{F}_{ολ}$ *των δυνάμεων που ασκούνται κάθε στιγμή σ' αυτό, και έχει την ίδια κατεύθυνση μ' αυτήν».*

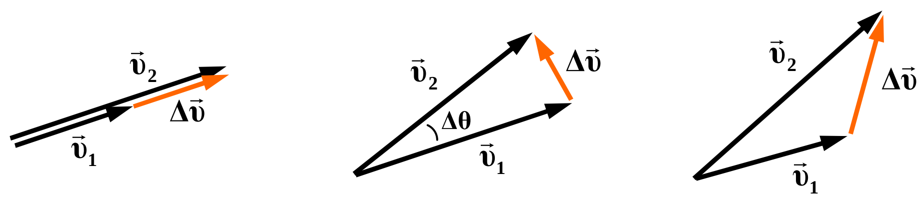



$$\boxed{\Sigma\vec{F} = m\,\vec{\alpha}} \quad \text{(3)}$$

Η θέση του υλικού σημείου σε ένα σύστημα OXYZ προσδιορίζεται από 3 μεταβλητές (3 βαθμοί ελευθερίας). Αν πρόκειται για επίπεδη κίνηση, π.χ. πάνω στο (X,Y) επίπεδο, τότε απαιτούνται 2 μεταβλητές που προσδιορίζονται από τις αλγεβρικές μορφές της (1) ή της (3) κατά άξονα: $\boxed{\Sigma F_x = m\,\alpha_x}$ και $\boxed{\Sigma F_y = m\,\alpha_y}$

Η επιτάχυνση εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα του υλικού σημείου:

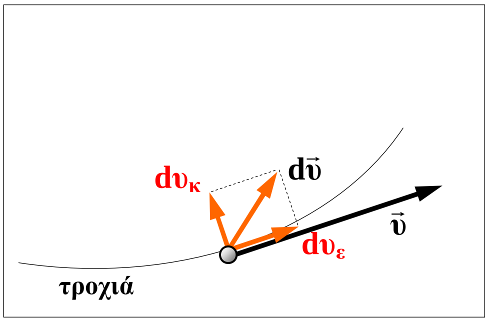
$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}\right) \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$$




**Μεταβολή του μέτρου** **Μεταβολή της κατεύθυνσης** **Μεταβολή και των δύο**

Στην περίπτωση που μεταβάλλεται μόνο η κατεύθυνση, όσο μικραίνει η μεταβολή $\Delta\vec{\upsilon}$ (μικρότερη γωνία $\Delta\theta$), τείνει να γίνει κάθετη στην ταχύτητα $\vec{\upsilon}$.

Αν αναλύσουμε μια *στοιχειώδη* μεταβολή $\mathbf{d\vec{\upsilon}}$ της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ σε δύο συνιστώσες, *παράλληλα* και *κάθετα* προς αυτήν, τότε:

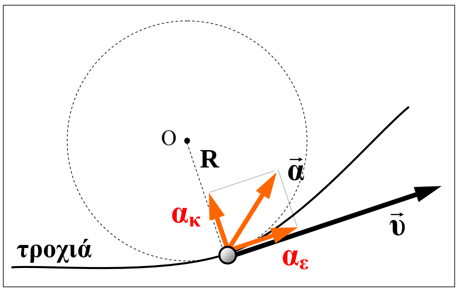



- Η παράλληλη ή *επιτρόχια* συνιστώσα $\mathbf{d\vec{\upsilon}_E}$ σχετίζεται με τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας.
- Αντίθετα, η κάθετη μεταβολή $\mathbf{d\vec{\upsilon}_K}$ σχετίζεται με τη μεταβολή της κατεύθυνσης της ταχύτητας.

Από τη σχέση $\mathbf{d\vec{\upsilon} = d\vec{\upsilon}_E + d\vec{\upsilon}_K}$ προκύπτει:

$$\frac{\mathbf{d\vec{\upsilon}}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d\vec{\upsilon}_E}}{\mathbf{dt}} + \frac{\mathbf{d\vec{\upsilon}_K}}{\mathbf{dt}} \rightarrow \frac{\mathbf{d\vec{\upsilon}}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d\vec{\upsilon}_E}}{\mathbf{dt}} + \frac{\mathbf{d\vec{\upsilon}_K}}{\mathbf{dt}} \rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_E + \vec{\alpha}_K} \quad \textbf{(4)}$$

Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε από μια συνιστώσα επιτάχυνσης στη μεταβολή του καθενός από τα δύο χαρακτηριστικά της ταχύτητας:




- Την ***επιτρόχια επιτάχυνση*** $\vec{\alpha}_E$ συγγραμμική με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (εφαπτομένη στην τροχιά, *επί της τροχιάς*) που σχετίζεται με τη μεταβολή του μέτρου της, και έχει μέτρο:

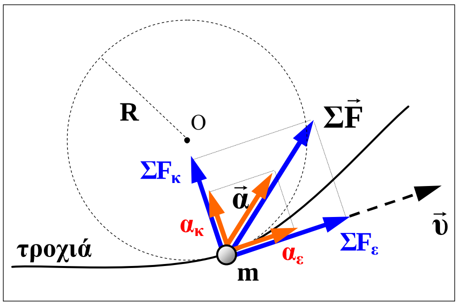
$$\alpha_E = \frac{\mathbf{d}|\vec{\upsilon}|}{\mathbf{dt}} \quad \text{ή πιο απλά} \quad \boxed{\alpha_E = \frac{\mathbf{d\upsilon}}{\mathbf{dt}}} \quad \textbf{(5)}$$

- Την ***κεντρομόλο επιτάχυνση*** $\vec{\alpha}_K$ κάθετη στην ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της τροχιάς) που σχετίζεται με τη μεταβολή της κατεύθυνσης και έχει μέτρο:

$$\boxed{\alpha_K = \frac{\upsilon^2}{\mathbf{R}}} \quad \textbf{(6)}$$

(Όπου $\boldsymbol{\upsilon}$ το μέτρο της ταχύτητας και **R** η *ακτίνα καμπυλότητας* της τροχιάς).

Αν σε μια επίπεδη κίνηση επιλέξουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων ε, κ παράλληλου και κάθετου αντίστοιχα στην ταχύτητα και αναλύσουμε σ' αυτούς τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα:




$$\boxed{\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\,\vec{\alpha}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\Sigma \mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{m}\,\alpha_\varepsilon \\ \Sigma \mathbf{F}_\kappa = \mathbf{m}\,\alpha_\kappa\end{array}} \quad \textbf{(7)}$$

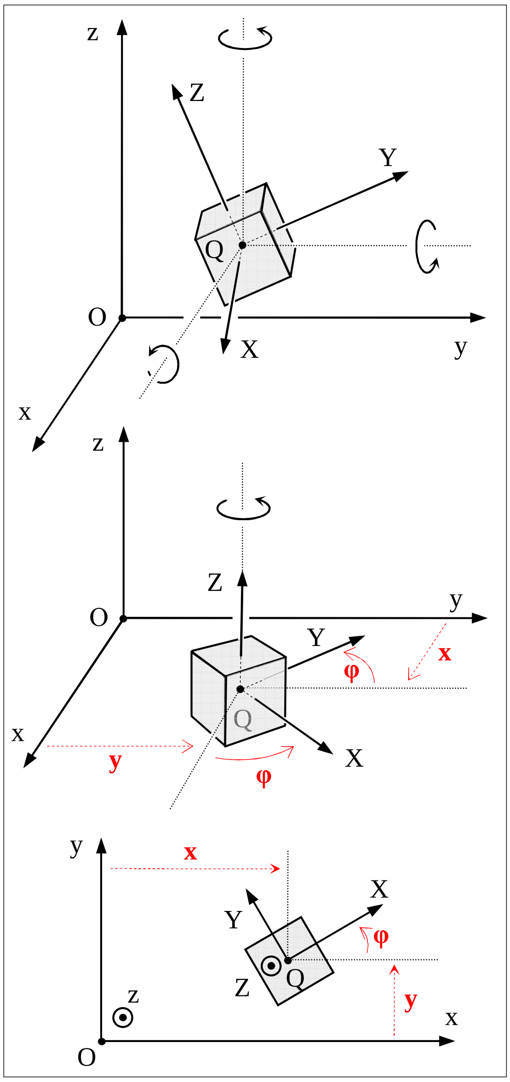
Με την ανάλυση αυτή, η ***επιτρόχια*** συνιστώσα $\boldsymbol{\Sigma F_\varepsilon}$ είναι αυτή που προκαλεί μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητας, ενώ η κάθετη συνιστώσα $\boldsymbol{\Sigma F_\kappa}$ είναι αυτή που παίζει ρόλο ***κεντρομόλου δύναμης*** και αναγκάζει το σώμα να διαγράψει καμπυλόγραμμη τροχιά, μεταβάλλοντας την κατεύθυνση της ταχύτητάς του.

Συνηθισμένες περιπτώσεις επίπεδων κινήσεων που έχουμε συναντήσει:

| | |
|---|---|
| Ισορροπία ή κίνηση με σταθερή ταχύτητα (ΕΟΚ) | $\boldsymbol{\Sigma F_\varepsilon = 0}$<br>$\boldsymbol{\Sigma F_\kappa = 0}$ |
| Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση (ΕΟΜΚ) | $\boldsymbol{\Sigma F_\varepsilon = m\,\alpha_\varepsilon = m\,\alpha}$ = σταθ.<br>$\boldsymbol{\Sigma F_\kappa = 0}$ |
| Ευθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση | $\boldsymbol{\Sigma F_\varepsilon = m\,\alpha_\varepsilon = m\,\alpha} \neq$ σταθ.<br>$\boldsymbol{\Sigma F_\kappa = 0}$ |
| Ομαλή κυκλική κίνηση | $\boldsymbol{\Sigma F_\varepsilon = 0}$<br>$\boldsymbol{\Sigma F_\kappa = m\,\alpha_\kappa = m\,\alpha}$ = σταθ. (μέτρο) |
| Κυκλική (**R**=σταθ.) ή καμπυλόγραμμη κίνηση (**R**≠σταθ.) | $\boldsymbol{\Sigma F_\varepsilon = m\,\alpha_\varepsilon}$<br>$\boldsymbol{\Sigma F_\kappa = m\,\alpha_\kappa}$ |

# B) Στερεό σώμα

## Η κινηματική του στερεού




Η *γενική μετατόπιση* στερεού είναι *μεταφορά* και *περιστροφή* (θεώρημα Chasles).

Για τη μελέτη της κίνησής του χρησιμοποιούμε συνήθως δύο συστήματα αναφοράς. Το πρώτο QXYZ είναι σταθερά προσαρτημένο στο στερεό με την αρχή του Q να συμπίπτει με κάποιο σημείο του στερεού. Το σημείο αυτό μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο του στερεού.

Ως προς το δεύτερο που είναι κάποιο αδρανειακό σύστημα Oxyz προσδιορίζουμε τη θέση της αρχής καθώς και τον προσανατολισμό του πρώτου συστήματος.

Η *γενική κίνηση* στερεού έχει 6 βαθμούς ελευθερίας. Χρειάζονται τρεις μεταβλητές για τον προσδιορισμό της θέσης του Q ως προς O και άλλες τρεις για τον προσανατολισμό των X, Y, Z αξόνων ως προς τους x, y, z.

Στη περίπτωση της επίπεδης κίνησης, όλα τα σημεία του στερεού κινούνται επάνω σε ένα επίπεδο, π.χ. το (x,y), ή σε επίπεδα παράλληλα προς αυτό, και η περιστροφή γίνεται περί άξονα κάθετο σ' αυτό, π.χ. τον z. Έτσι οι αναγκαίες μεταβλητές περιορίζονται σε 3. Δηλαδή δύο για τη θέση του Q και μία για τη στροφή περί τον άξονα.

### α) Μεταφορική κίνηση στερεού

Αν κατά την κίνηση ενός στερεού, όλα τα σημεία του έχουν κάθε στιγμή *ίδια ταχύτητα* τότε το στερεό μεταφέρεται στο χώρο χωρίς να αλλάζει προσανατολισμό.

Η επιτάχυνση όλων των σημείων είναι κι αυτή κάθε στιγμή ίδια, καθώς και η μετατόπισή τους σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα. Οι τροχιές τους είναι ίδιες και μπορούν με παράλληλη μεταφορά να συμπέσουν.

Σε περίπτωση επίπεδης κίνησης οι τροχιές των σημείων είναι επίπεδες και τα επίπεδά τους είναι παράλληλα.

### β) Στροφική κίνηση στερεού γύρω από σταθερό άξονα

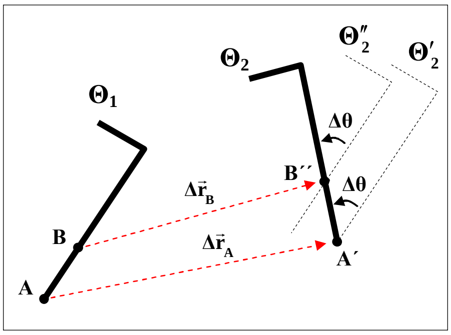
Αν κατά την κίνηση του στερεού ένα σημείο του παραμένει ακίνητο, τότε από το σημείο αυτό διέρχεται άξονας γύρω από τον οποίο στρέφεται το στερεό (θεώρημα Euler). Όλα τα σημεία του διαγράφουν κυκλικές τροχιές σε επίπεδα κάθετα προς τον άξονα και τα κέντρα τους πάνω του.

Η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση είναι τώρα κοινή κάθε στιγμή για όλα τα σημεία, καθώς και η γωνιακή μετατόπιση σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα.

*Στην επίπεδη κίνηση που μελετάμε στα πλαίσια του σχολικού, ο άξονας περιστροφής είναι κύριος άξονας αδράνειας του στερεού, έχει σταθερή διεύθυνση και όλα τα διανυσματικά μεγέθη που περιγράφουν τη στροφική του κίνηση έχουν τη διεύθυνση του άξονα.*

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ**

Τονίζεται ότι *τα κινηματικά μεγέθη που περιγράφουν τη στροφική κίνηση του στερεού (γωνιακή μετατόπιση – ταχύτητα – επιτάχυνση) είναι ανεξάρτητα της επιλογής του σημείου αναφοράς Ο΄ του στερεού ως προς το οποίο θεωρούμε ότι γίνεται η περιστροφή.*




Στο διπλανό σχήμα για παράδειγμα, έχουμε γενική μετατόπιση στερεού από τη «θέση» $\Theta_1$ στη $\Theta_2$. Αν θεωρήσουμε εναλλακτικά το Α ή το Β σαν σημείο αναφοράς, τότε η γενική μετατόπιση $\Theta_1 \rightarrow \Theta_2$ αντιστοιχεί σε διαφορετική μετατόπιση του σημείου αναφοράς, $\mathbf{\Delta\vec{r}_A}$ ή $\mathbf{\Delta\vec{r}_B}$ σε κάθε περίπτωση, αλλά στην ίδια γωνία στροφής $\mathbf{\Delta\theta}$.

## γ) Επίπεδη κίνηση στερεού

Η επίπεδη κίνηση στερεού είναι μία *σύνθετη κίνηση* και περιγράφεται όπως είδαμε με τρεις μεταβλητές, δύο για τη θέση κάποιου σημείου αναφοράς Q του στερεού στο επίπεδο (x,y) και μία για τον προσανατολισμό του, τη στροφή δηλαδή του στερεού γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο (x,y) που διέρχεται από το Q.

Με τη βοήθεια των τριών αυτών μεταβλητών, π.χ. **x(t)**, **y(t)** και **θ(t)**, μπορούμε να γνωρίζουμε οποιαδήποτε στιγμή τη θέση κάθε άλλου σημείου του στερεού, επομένως και τη «θέση» του στερεού στο χώρο.

- Αν το στερεό δεν αλλάζει προσανατολισμό, τότε θεωρούμε ότι εκτελεί *μεταφορική κίνηση* και αρκούν δύο μεταβλητές **x(t)**, **y(t)** για τη θέση του σημείου αναφοράς.
- Αν κάποιο σημείο του Q μένει ακίνητο, τότε θεωρούμε ότι το στερεό εκτελεί *στροφική κίνηση ως προς σταθερό άξονα που διέρχεται από το Q*, και αρκεί μία μεταβλητή **θ(t)** για τον προσδιορισμό της στροφής ως προς τον σταθερό αυτό άξονα.
- Αν κανένα σημείο του στερεού δεν μένει ακίνητο, τότε μπορούμε να επιλέξουμε τυχαίο σημείο Q ως σημείο αναφοράς και να προσδιορίσουμε τις μεταβλητές **x(t)**, **y(t)** για τη θέση του, καθώς και την **θ(t)** για τη στροφή του στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο αυτό.

Επειδή η επιλογή τυχαίου σημείου αναφοράς Q καθιστά την περιγραφή της κίνησης του στερεού πολύπλοκη, εξυπηρετεί συνήθως *η επιλογή του κέντρου μάζας CM* του στερεού ως τέτοιου σημείου.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρούμε γενικά τη σύνθετη κίνηση του στερεού ως συνδυασμό δύο ταυτόχρονων κινήσεων:

**1)** Μιας μεταφορικής κίνησης, για την περιγραφή της οποίας μελετάμε την κίνηση του κέντρου μάζας του στερεού, και

**2)** Μιας στροφικής κίνησης περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας.

**Το κέντρο μάζας CM**

Το κέντρο μάζας ενός συστήματος **N** υλικών σωματιδίων $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, …, $\mathbf{m_N}$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\sum_i \mathbf{m_i \vec{r}_i} = \mathbf{M \vec{r}_{CM}} \quad \mathbf{(8)}$$

Με πρώτη παραγώγιση προκύπτει:

$$\sum_i \mathbf{m_i \vec{\upsilon}_i} = \mathbf{M \vec{\upsilon}_{CM}} \quad \mathbf{(9)} \quad \text{ή} \quad \sum_i \mathbf{\vec{p}_i} = \mathbf{\vec{p}_{CM}} \quad \mathbf{(9α)}$$

Και με δεύτερη παραγώγιση:

αν οι μάζες $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, … είναι σταθερές $\sum_i \mathbf{m_i \vec{\alpha}_i} = \mathbf{M \vec{\alpha}_{CM}}$ **(10)**

$$\text{ή γενικότερα} \quad \sum_i \frac{\mathbf{d\vec{p}_i}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{d\vec{p}_{CM}}}{\mathbf{dt}} \quad \mathbf{(10α)}$$

Η (8) δεν διδάσκεται στο Λύκειο, μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την (9) σαν εναλλακτική σχέση ορισμού του CM, η οποία το προσδιορίζει ως «*σημείο εφαρμογής της συνολικής ορμής*» του συστήματος των **N** σωματιδίων.

Μπορούμε επίσης να προσδιορίσουμε έμμεσα το CM, ως «κέντρο βάρους», μια και τα δύο σημεία συμπίπτουν μέσα στο (ομογενές) βαρυτικό πεδίο.

**Ο 2$^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα και η κίνηση του κέντρου μάζας**

Το μηχανικό στερεό ορίζεται ως ένα σύνολο **N** υλικών σημείων ή σωματιδίων $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, … με σταθερές σχετικές θέσεις μεταξύ τους, ακόμη και κάτω από την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων, ώστε το σχήμα του στερεού να παραμένει αμετάβλητο. Η ιδιότητα αυτή οφείλεται στη δράση *περιοριστικών* εσωτερικών αλληλεπιδράσεων ανάμεσα στα σωματίδια. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές είναι συγγραμμικές και στο σύνολό τους αλληλοαναιρούνται.

Θεωρώντας τις μάζες $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, … σταθερές, εφαρμόζουμε σε κάθε σωματίδιο τον 2$^ο$ νόμο στη μορφή $\mathbf{\vec{F}_i} = \frac{\mathbf{d\vec{p}_i}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{m_i \vec{\alpha}_i}$ και αθροίζουμε, οπότε προκύπτει:

$$\mathbf{\Sigma\vec{F}} = \sum_i \mathbf{m_i \vec{\alpha}_i} \quad \mathbf{(11)}$$

Το 1$^ο$ μέλος είναι η *συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό* (οι εσωτερικές αλληλεπιδράσεις απλοποιούνται).

Από τη σχέση (10), που είδαμε πιο πριν για το κέντρο μάζας, και την (11) προκύπτει ότι:

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = M\,\vec{\alpha}_{CM}} \quad (12) \qquad \text{ή και πιο γενικά} \qquad \boxed{\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}} \quad (12\alpha)\ *$$

Δηλαδή ο 2ος νόμος του Νεύτωνα στη μορφή (12) ή (12α) ***περιγράφει την κίνηση του κέντρου μάζας του στερεού***. Χρησιμοποιώντας τη μορφή αυτή αντιμετωπίζουμε αφαιρετικά το στερεό ως ***υλικό σημείο μάζας Μ που βρίσκεται στη θέση του κέντρου μάζας***.

Μ' άλλα λόγια η σχέση αυτή είναι μια αθροιστική εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου για υλικό σημείο, σε ένα «συλλογικό» υλικό σημείο, το κέντρο μάζας. Δεν ενδιαφέρουν οι διαστάσεις του στερεού, ο προσανατολισμός του ή ο χώρος που καταλαμβάνει.

(* *Στη βιβλιογραφία αναφέρεται και σαν 1ος νόμος του Euler*)

## Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα και ο προσανατολισμός του στερεού

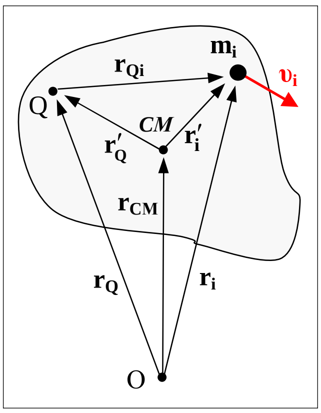
Αν τώρα εφαρμόσουμε σε κάθε σωματίδιο τον 2ο νόμο στη γενικευμένη μορφή του, με όρους ροπής και στροφορμής *ως προς τυχαίο ακίνητο σημείο Ο* στο αδρανειακό μας σύστημα (σχέση 2), δηλαδή $\vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times \dfrac{d\vec{p}_i}{dt}$ και αθροίσουμε, προκύπτει:

$$\boxed{(\Sigma\vec{\tau})_{(O)} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O)}} \quad (13)\ *$$

Το 1ο μέλος είναι η συνισταμένη των ως προς Ο ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό και το 2ο μέλος είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του στερεού ως προς το σημείο αυτό.

(* *Αναφέρεται και σαν 2ος νόμος του Euler*)

Η σχέση (13) δεν είναι πάντα εύκολα εφαρμόσιμη. Μας εξυπηρετεί συνήθως να χρησιμοποιούμε *σημείο που ανήκει στο στερεό*, έστω Q. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ως προς το σημείο αυτό ο 2ος νόμος παίρνει τη μορφή:




$$(\Sigma\vec{\tau})_{(Q)} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(Q)} - m\cdot\vec{r}\,'_Q \times \vec{\alpha}_Q \quad (14)$$

Το 1ο μέλος είναι η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς Q. Στο 2ο μέλος έχουμε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ως Q, καθώς και τον επιπλέον όρο $-m\cdot\vec{r}\,'_Q \times \vec{\alpha}_Q$

όπου $\vec{\mathbf{a}}_Q$ είναι η επιτάχυνση του σημείου Q ως προς το αδρανειακό σύστημα O και $\vec{\mathbf{r}}'_Q$ η θέση του ως προς το κέντρο μάζας C του στερεού.

Η ανωτέρω σχέση (14) ξεφεύγει φυσικά από το επίπεδο της Γ΄ Λυκείου, αλλά *με κατάλληλη επιλογή του σημείου Q* παίρνει την ίδια μορφή με τη (13) και είναι ισοδύναμη μ' αυτήν. Τέτοιες περιπτώσεις είναι οι εξής:

**1)** Το σημείο Q *να είναι ένα ακίνητο σημείο του στερεού*, δηλαδή το στερεό να κάνει στροφική κίνηση περί *σταθερό άξονα* που διέρχεται από το Q, οπότε $\vec{\mathbf{a}}_Q = \mathbf{0}$ και η σχέση (14) γίνεται:

$$\boxed{(\mathbf{\Sigma\vec{\tau}})_{(\mathbf{Q})} = \left(\frac{\mathbf{d\vec{L}}}{\mathbf{dt}}\right)_{(\mathbf{Q})}} \quad \mathbf{(15)}$$

Αν κατά την κίνηση του στερεού *περί τον σταθερό άξονα* δεν μεταβάλλεται η ροπή αδράνειας του στερεού, τότε $\mathbf{d\vec{L}} = \mathbf{d(I\cdot\vec{\omega})} = \mathbf{I\cdot d\vec{\omega}}$ και η σχέση (15) μπορεί να πάρει τη γνωστή μορφή:

$$\boxed{(\mathbf{\Sigma\vec{\tau}})_{(\mathbf{Q})} = \mathbf{I}_{(\mathbf{Q})}\cdot\vec{\mathbf{a}}_{\gamma\omega\nu}} \quad \mathbf{(15\alpha)}$$

**2)** Το σημείο Q *να συμπίπτει με το κέντρο μάζας του στερεού*. Στην περίπτωση αυτή $\vec{\mathbf{a}}_Q = \vec{\mathbf{a}}_{CM}$ και $\vec{\mathbf{r}}'_Q = \mathbf{0}$. Η (14) γίνεται:

$$\boxed{(\mathbf{\Sigma\vec{\tau}})_{(\mathbf{CM})} = \left(\frac{\mathbf{d\vec{L}}}{\mathbf{dt}}\right)_{(\mathbf{CM})}} \quad \mathbf{(16)}$$

και προφανώς *ισχύει ανεξάρτητα από το είδος της κίνησης του κέντρου μάζας* του στερεού. Ο $2^{ος}$ όρος στη (16) εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ιδιοστροφορμής (spin) του στερεού.

Αν κατά την περιστροφή του ως προς το CM δεν μεταβάλλεται η ροπή αδράνειας, τότε η (16) μπορεί να γραφεί όπως και πριν στη γνωστή μορφή:

$$\boxed{(\mathbf{\Sigma\vec{\tau}})_{(\mathbf{CM})} = \mathbf{I}_{(\mathbf{CM})}\cdot\vec{\mathbf{a}}_{\gamma\omega\nu}} \quad \mathbf{(16\alpha)}$$

**3)** Τα διανύσματα $\vec{\mathbf{r}}'_Q$ και $\vec{\mathbf{a}}_Q$ να έχουν την ίδια διεύθυνση. Μ' άλλα λόγια, *ο φορέας της επιτάχυνσης του Q να διέρχεται από το κέντρο μάζας CM του στερεού*. Το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων έχει τότε μηδενική τιμή.

Η περίπτωση αυτή βρίσκει πρακτικά εφαρμογή όταν από το Q διέρχεται *στιγμιαίος άξονας περιστροφής* και θέλουμε να εφαρμόσουμε το $2^ο$ νόμο ως προς αυτόν. Αν ο φορέας της $\vec{\mathbf{a}}_Q$ διέρχεται από το CM, τότε η (14) μπορεί πάλι να γραφεί στη μορφή (15).

Επιπλέον, η μορφή (15α) μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τον πρόσθετο περιορισμό να παραμένει σταθερή η ροπή αδράνειας ως προς τον στιγμιαίο άξονα Q.

Δεδομένου ότι $\mathbf{I_Q = I_{CM} + M \cdot \left|\vec{r}'_Q\right|^2}$ θα πρέπει να μην μεταβάλλεται η απόσταση του στιγμιαίου άξονα από το κέντρο μάζας.

## Γ) Συμπεράσματα για τη μελέτη της επίπεδης κίνησης στερεού (ως προς αδρανειακό σύστημα Oxyz)

Όπως έχουμε αναφέρει η επίπεδη κίνηση είναι κίνηση των σημείων του στερεού στο επίπεδο (x,y) ή σε παράλληλα προς αυτό, και στροφή του στερεού περί άξονα z κάθετο στο (x,y). Όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό είναι ομοεπίπεδες, επί του (x,y) και τα στροφικά μεγέθη συγγραμμικά επί του άξονα z.

### I) <u>Κίνηση του κέντρου μάζας CM</u>

Για την κίνηση του CM έχουμε τις σχέσεις (12α) ή (12) που μπορούμε να χρησιμοποιούμε σε κάθε περίπτωση:

$$\boxed{\mathbf{\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathbf{\Sigma\vec{F} = M\,\vec{\alpha}_{CM}}}$$

Επιλέγοντας μάλιστα τους άξονες x και y ώστε να είναι αντίστοιχα παράλληλος και κάθετος στην ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_{cm}}$ του κέντρου μάζας έχουμε:

| | |
|---|---|
| $\mathbf{\Sigma F_x = M \cdot \alpha_{cm}}$<br>$\mathbf{\Sigma F_y = M \cdot \alpha_\kappa}$ | Όπου $\boldsymbol{\alpha_{cm}}$ και $\boldsymbol{\alpha_\kappa}$ είναι αντίστοιχα η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση του CM. |

### II) <u>Περιστροφή του στερεού</u>

**II–α)** Η σχέση (13), ισχύει σε κάθε περίπτωση ως προς την αρχή ή οποιοδήποτε άλλο ακίνητο σημείο O του αδρανειακού συστήματος, δηλαδή αλγεβρικά επί νοητού άξονα κάθετο στο επίπεδο (x,y) στο σημείο O:

$$\boxed{\mathbf{(\Sigma\vec{\tau})_{(O)} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O)}}}$$

Η σχέση αυτή δεν είναι όμως εύχρηστη παρά μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις.

**II–β)** Η πιο εύχρηστη μορφή της προηγούμενης σχέσης είναι η σχέση (16) ή (16α) που ισχύει <u>*σε κάθε περίπτωση ως προς το CM του στερεού*</u>, δηλαδή αλγεβρικά επί νοητού άξονα που διέρχεται από το CM και είναι κάθετος στο επίπεδο (x,y):

$$\boxed{\mathbf{(\Sigma\vec{\tau})_{(CM)} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(CM)}}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathbf{(\Sigma\vec{\tau})_{(CM)} = I_{(CM)} \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}}}$$

**ΙΙ–γ)** Αν η περιστροφή γίνεται *ως προς σταθερό άξονα* κάθετο στο επίπεδο (x,y), τότε πιο εύχρηστη μορφή είναι η σχέση (15) ή (15α), όπου Q είναι σημείο του στερεού από το οποίο διέρχεται ο σταθερός άξονας (ομοίως, αλγεβρικά επί του άξονα):

$$\boxed{\left(\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}\right)_{(\mathbf{Q})}=\left(\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{L}}}{\mathbf{dt}}\right)_{(\mathbf{Q})}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\left(\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}\right)_{(\mathbf{Q})}=\mathbf{I}_{(\mathbf{Q})}\cdot\vec{\boldsymbol{\alpha}}_{\gamma\omega\nu}}$$

**ΙΙ–δ)** Τέλος, είναι δυνατή και η χρήση της (15) ή της (15α) αν το Q είναι σημείο του αδρανειακού συστήματος από το οποίο διέρχεται *στιγμιαίος άξονας* περιστροφής, με την προϋπόθεση όμως ότι *ικανοποιούνται οι περιορισμοί* που αναφέρθηκαν κατά την ανάλυση της κατάλληλης επιλογής σημείου Q για την εφαρμογή της σχέσης (14).

## Δ) Ισορροπία στερεού σώματος (στο αδρανειακό σύστημα Oxyz)

### Ι) Ισορροπία του κέντρου μάζας CM

Όπως προκύπτει και από την προηγούμενη περίπτωση **Γ–Ι**, αν ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$\boxed{\mathbf{\Sigma F_x = 0}} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{\Sigma F_y = 0}}$$

τότε το CM του στερεού *παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα*.

### ΙΙ) Στροφική ισορροπία

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

**ΙΙ–α)** *Αν το στερεό παραμένει ακίνητο*, τότε (επιπλέον των $\mathbf{\Sigma F_x=0}$ και $\mathbf{\Sigma F_x=0}$)

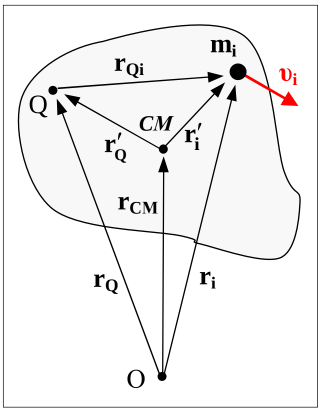
θα ικανοποιείται η συνθήκη $\boxed{\left(\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}\right)_{(\mathbf{O})}=0}$ *ως προς οποιοδήποτε σημείο O* του στερεού ή ακίνητο σημείο του Oxyz (αλγεβρικά ως προς σταθερό ή νοητό άξονα κάθετο στο επίπεδο (x,y).

**ΙΙ–β)** *Αν το στερεό κάνει μεταφορική κίνηση, τότε ασφαλής επιλογή σημείου αναφοράς είναι το κέντρο μάζας CM του στερεού*.

Λαμβάνουμε δηλαδή ως συνθήκη στροφικής ισορροπίας την $\boxed{\left(\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}\right)_{(\mathbf{CM})}=0}$

## ΕΝΘΕΤΟ

***Απόδειξη της σχέσης (14)***




Η στροφορμή του στερεού ως προς σημείο του Q είναι:

$$\vec{\mathbf{L}}_{(Q)} = \sum \vec{\mathbf{r}}_{Qi} \times (\mathbf{m}_i \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i) \quad \rightarrow$$

$$\vec{\mathbf{L}}_{(Q)} = \sum (\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q) \times [\mathbf{m}_i (\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i - \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_Q)] \quad \rightarrow$$

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_{(Q)} = \sum (\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q) \times \mathbf{m}_i \left(\frac{d\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i}{dt} - \frac{d\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_Q}{dt}\right) + \sum \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} - \frac{d\vec{\mathbf{r}}_Q}{dt}\right) \times \mathbf{m}_i (\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i - \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_Q) \quad \rightarrow$$

Ο δεύτερος όρος είναι: $\sum \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} - \frac{d\vec{\mathbf{r}}_Q}{dt}\right) \times \mathbf{m}_i (\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i - \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_Q) = \sum \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{Qi} \times \mathbf{m}_i \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{Qi} = \mathbf{0}$, οπότε

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_{(Q)} = \sum (\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q) \times \mathbf{m}_i \frac{d\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i}{dt} - \sum \left(\mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \frac{d\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_Q}{dt}\right) + \sum \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_Q \times \frac{d\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_Q}{dt}$$

Ο πρώτος όρος είναι η συνισταμένη των ροπών των δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό, ως προς το σημείο Q: $\sum (\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q) \times \mathbf{m}_i \frac{d\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i}{dt} = \sum \vec{\mathbf{r}}_{Qi} \times \vec{\mathbf{F}}_i = (\boldsymbol{\Sigma\tau})_{(Q)}$ οπότε:

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_{(Q)} = (\boldsymbol{\Sigma\tau})_{(Q)} - \mathbf{M}\vec{\mathbf{r}}_{CM} \times \frac{d\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_Q}{dt} + \mathbf{M}\vec{\mathbf{r}}_Q \times \frac{d\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_Q}{dt} \quad \rightarrow$$

$$\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_{(Q)} = (\boldsymbol{\Sigma\tau})_{(Q)} + \mathbf{M} \cdot (\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_{CM}) \times \frac{d\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_Q}{dt}$$

Η διαφορά $\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_{CM}$ εκφράζει το διάνυσμα θέσης $\vec{\mathbf{r}}'_Q$ του σημείου Q ως προς το κέντρο μάζας CM του στερεού. Έτσι η σχέση παίρνει τελικά τη μορφή:

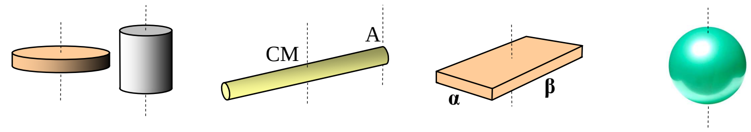
$$\boxed{\left(\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}\right)_{(Q)} = (\boldsymbol{\Sigma\tau})_{(Q)} + \mathbf{M} \cdot \vec{\mathbf{r}}'_Q \times \vec{\boldsymbol{\alpha}}_Q}$$

# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

*(Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας δίνεται **g = 10m/s²**. Ακόμα, δίνεται ο πιο κάτω πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών και σχέσεων υπολογισμού ροπής αδράνειας).*

| Γωνία φ | | ημφ | | συνφ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | 0 | 0,000 | 0 | 1,000 |
| 30° | π/6 | $1/2$ | 0,500 | $\sqrt{3}/2$ | 0,866 |
| 37° | 0,2π | $3/5$ | 0,600 | $4/5$ | 0,800 |
| 45° | π/4 | $\sqrt{2}/2$ | 0,707 | $\sqrt{2}/2$ | 0,707 |
| 53° | 0,3π | $4/5$ | 0,800 | $3/5$ | 0,600 |
| 60° | π/3 | $\sqrt{3}/2$ | 0,866 | $1/2$ | 0,500 |
| 90° | π/2 | 1 | 1,000 | 1 | 0,000 |

**Ροπές αδράνειας**




Δίσκος ή κύλινδρος: $I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$

Ράβδος: $I_{cm} = \frac{1}{12} M L^2$, $I_A = \frac{1}{3} M L^2$

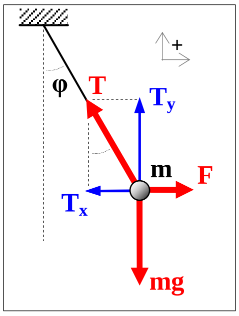
Ορθογώνια πλάκα: $I_{cm} = \frac{1}{12} M\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$

Συμπαγής σφαίρα: $I_{cm} = \frac{2}{5} M R^2$

Σφαιρικός φλοιός: $I_{cm} = \frac{2}{3} M R^2$

---

**1.** Μικρό σώμα μάζας **m=6kg** είναι κρεμασμένο από νήμα και ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία **φ=37°** με την κατακόρυφη. Να προσδιορίσετε τα μέτρα της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που συγκρατεί το σώμα και της δύναμης που του ασκεί το νήμα.




**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

Το σώμα θεωρείται υλικό σημείο και ισορροπεί, επομένως:

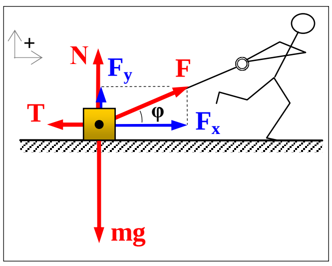
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F - T_x = 0 \rightarrow F = T\cdot ημφ$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T_y - mg = 0 \rightarrow T\cdot συνφ = mg$ (2)

Από (1) $\rightarrow$ $\boxed{T = 75N}$ και από (2) $\rightarrow$ $\boxed{F = 45N}$

---

**2.** Ο άνθρωπος στο διπλανό σχήμα ασκεί μέσω νήματος στο ακίνητο αρχικά κιβώτιο σταθερή δύναμη μέτρου **F=200N** που σχηματίζει γωνία **φ=37°** με το οριζόντιο επίπεδο. Η μάζα του κιβωτίου είναι **m=40kg**, οι διαστάσεις του αμελητέες και παρουσιάζει με το δάπεδο συντελεστή τριβής $\mu_{ορ}$ = **0,4** και $\mu_{ολ}$=**0,3**.




**i)** Να εξετάσετε αν θα κινηθεί το κιβώτιο.

**ii)** Αν ναι, να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσής του.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

Το σώμα θεωρείται υλικό σημείο και αρχικά είναι ακίνητο. Για να ξεκινήσει θα πρέπει η συνιστώσα $F_x$ να υπερνικήσει τη στατική τριβή. Η οριακή στατική τριβή είναι $T_{ορ} = \mu_{ορ}\cdot N$.

**i)** Αναλύουμε τη δύναμη που ασκεί το νήμα σε συνιστώσες:

$F_x = F\cdot συνφ \;\rightarrow\; F_x = 120\ N$

$F_y = F\cdot ημφ \;\rightarrow\; F_y = 160\ N$

Υπολογίζουμε τα μέτρα της κάθετης δύναμης στήριξης από το δάπεδο και της οριακής τριβής:

$ΣF_y = 0 \;\rightarrow\; N + F_y - mg = 0 \;\rightarrow\; N = 240\ N$

(Ισχύει **N > 0** δεν κινδυνεύει επομένως να χάσει την επαφή του με το έδαφος.)

$T_{ορ} = μ_{ορ}\cdot N \;\rightarrow\; T_{ορ} = 96\ N$

Προφανώς $F_x > T_{ορ}$ επομένως το κιβώτιο <u>θα κινηθεί</u>.

**ii)** Εφόσον κινείται, αναπτύσσεται τριβή ολίσθησης: $T_{ολ} = μ_{ολ}\cdot N = 72\ N$

Από τον θεμελιώδη νόμο κατά τη διεύθυνση της κίνησης βρίσκουμε το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος:

$ΣF_x = m\cdot α \;\rightarrow\; F_x - T_{ολ} = m\cdot α \;\rightarrow\; \boxed{α = 1{,}2\ m/s^2}$

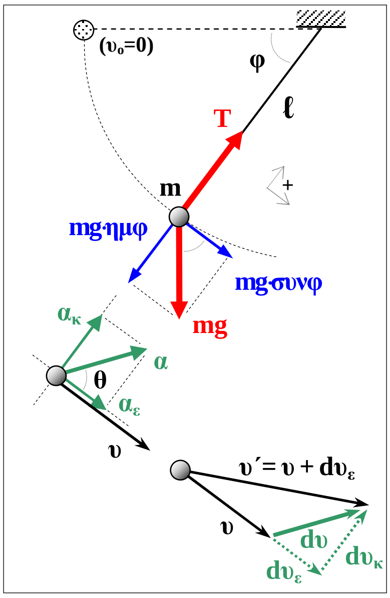
---

**3.** Μικρό σώμα μάζας **m=5kg** είναι κρεμασμένο από νήμα μήκους **ℓ=1m** και ισορροπεί κατακόρυφα. Διατηρώντας το νήμα τεντωμένο, εκτρέπουμε κατά γωνία **90°**, και αφήνουμε το σώμα να πέσει. Αυτό αρχίζει να κινείται χωρίς αρχική ταχύτητα, διαγράφοντας κυκλική τροχιά ακτίνας **ℓ**. Τη στιγμή που το νήμα σχηματίζει γωνία **φ=53°** ως προς την αρχική θέση, ζητούνται:

**i)** Το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητάς του.

**ii)** Το μέτρο και η κατεύθυνση του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα του σώματος.

Να θεωρήσετε γνωστό ότι το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά το σώμα στη θέση αυτή είναι $υ = \sqrt{2g\ell\, ημφ}$ .




**<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>:**

**i)** Το σώμα θεωρείται υλικό σημείο και κινείται διαγράφοντας καμπυλόγραμμη τροχιά. Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του θα πρέπει συνεπώς να έχει και επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσα, υπεύθυνες αντίστοιχα για τη μεταβολή του μέτρου και της κατεύθυνσης της ταχύτητας. Έτσι έχουμε:

$ΣF_x = m\cdot α_ε \;\rightarrow\; mg\cdot συνφ = m\cdot α_ε \;\rightarrow\; α_ε = g\cdot συνφ = 6\ m/s^2$ (1)

$ΣF_y = m\cdot α_κ \;\rightarrow\; T - mg\cdot ημφ = m\cdot υ^2/\ell \;\rightarrow\; \boxed{T = 3mg\cdot ημφ = 120\ N}$

Η επιτρόχια επιτάχυνση (1) εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του σώματος. Οπότε:

$$\boxed{d|\vec{υ}|/dt = α_ε = 6\ m/s^2}$$

**ii)** Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του σώματος, της οποίας οι συνιστώσες είναι οι $\alpha_\varepsilon$ και $\alpha_\kappa$. Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι $\alpha_\kappa = \upsilon^2/\ell = 16 m/s^2$.

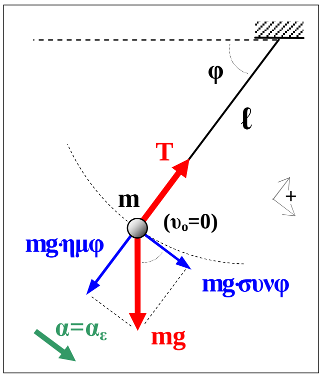
Έτσι, ο ζητούμενος ρυθμός είναι:

$$\boxed{|d\vec{\upsilon}|/dt = \alpha = \sqrt{\alpha_\varepsilon^2 + \alpha_\kappa^2} \approx 17\ m/s^2}$$

---

**4.** Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (i) και (ii) της προηγούμενης άσκησης (3), υποθέτοντας τώρα ότι το σώμα αφήνεται να πέσει με μηδενική ταχύτητα όταν το τεντωμένο νήμα σχηματίζει γωνία **φ** με την οριζόντια διεύθυνση.

(Δίνονται: **m=5kg**, **ℓ=1m**, **φ=53°**).




**<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>:**

**i)** Το ακίνητο αρχικά σώμα αρχίζει να κινείται διαγράφοντας καμπυλόγραμμη τροχιά. Η κεντρομόλος επιτάχυνση *τη στιγμή της εκκίνησης* είναι $\alpha_\kappa = \upsilon_o^2/\ell = 0$.

Από τον 2$^o$ νόμο έχουμε:

$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_\varepsilon \ \rightarrow\ mg \cdot συνφ = m \cdot \alpha_\varepsilon \ \rightarrow\ \alpha_\varepsilon = g \cdot συνφ = 6\ m/s^2$

$\Sigma F_y = m \cdot \alpha_\kappa = 0 \ \rightarrow\ T - mg \cdot ημφ = 0 \ \rightarrow\ \boxed{T = mg \cdot ημφ = 40\ N}$

Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του σώματος είναι όπως και πριν:

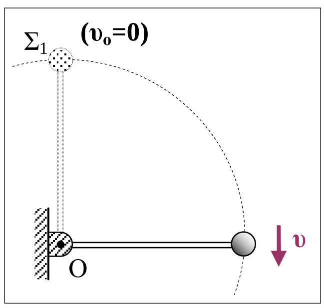
$$\boxed{d|\vec{\upsilon}|/dt = \alpha_\varepsilon = 6\ m/s^2}$$

**ii)** Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του σώματος, που τώρα όμως συμπίπτει με την επιτρόχια συνιστώσα της. Έτσι:

$$\boxed{|d\vec{\upsilon}|/dt = \alpha = 6\ m/s^2}$$

---

**5.** Η αβαρής λεπτή ράβδος του διπλανού σχήματος έχει μήκος **L** και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το ένα της άκρο O και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής της. Στο άλλο της άκρο είναι στερεωμένο μικρό σφαιρίδιο $\Sigma_1$ μάζας **m=5kg**.



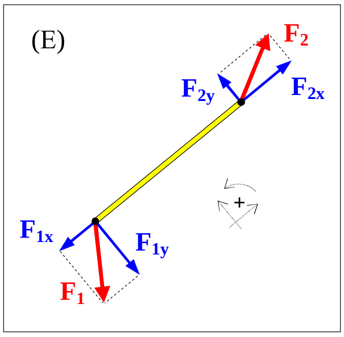

Το σύστημα ισορροπεί αρχικά στη θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας, αλλά αρχίζει να κινείται λόγω αστάθειας και το σφαιρίδιο αποκτά ταχύτητα μέτρου $\upsilon = \sqrt{2gL}$ τη στιγμή που η ράβδος διέρχεται από την οριζόντια θέση.

**i)** Να δείξετε ότι οι δυνάμεις που δέχεται η αβαρής ράβδος στα δύο άκρα της είναι κάθε στιγμή αντίθετες και κατά τη διεύθυνση του διαμήκη άξονά της.

**ii)** Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα του συστήματος, όταν η ράβδος περνάει από την οριζόντια θέση, και να υπολογίσετε τα μέτρα τους, καθώς και την επιτάχυνση του σφαιριδίου.

**iii)** Να επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα (ii) θεωρώντας όμως ότι το σύστημα αφήνεται ελεύθερο με μηδενική ταχύτητα από τη θέση αυτή.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**




**i)** Υποθέτουμε ότι η (λεπτή) ράβδος κάνει επίπεδη κίνηση σε επίπεδο (Ε) που την περιέχει. Έστω ακόμα ότι δέχεται στα δύο άκρα της δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ομοεπίπεδες με αυτήν.

Θεωρούμε ότι η μάζα της ράβδου είναι σχεδόν μηδενική (**Μ≈0**). Επομένως, και για το βάρος της, αλλά και για τη ροπή αδράνειάς της ως προς κάθε άξονα κάθετο στο επίπεδο (Ε), θα ισχύει το ίδιο. Αναλύουμε σε άξονες X,Y του επιπέδου, παράλληλο και κάθετο αντίστοιχα στη ράβδο. Από τους νόμους κίνησης έχουμε (αλγεβρικά):

Για την κίνηση του κέντρου μάζας της ράβδου,

$$\Sigma F_x = M \cdot \alpha_x \approx 0 \;\rightarrow\; F_{1x} + F_{2x} \approx 0 \;\rightarrow\; F_{1x} \approx -F_{2x} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = M \cdot \alpha_y \approx 0 \;\rightarrow\; F_{1y} + F_{2y} \approx 0 \;\rightarrow\; F_{1y} \approx -F_{2y} \quad (2)$$

Για την περιστροφή της ως προς σταθερό άξονα που διέρχεται από κάποιο σημείο της ή, αν δεν υπάρχει σταθερός άξονας, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της,

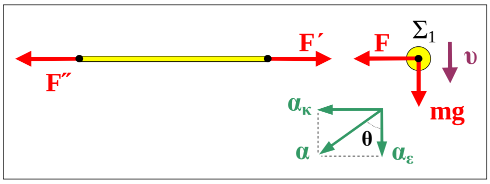
$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \approx 0 \quad (3)$$

Από την (1) βλέπουμε ότι οι δύο συγγραμμικές συνιστώσες $F_{1x}$ και $F_{2x}$ είναι αντίθετες, επομένως η συνολική ροπή τους ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδενική.

Από την (2) φαίνεται όμως ότι οι άλλες δύο συνιστώσες $F_{1y}$ και $F_{2y}$ αποτελούν ζεύγος, με ροπή μέτρου $\tau = F \cdot L$, όπου $F = |F_{1y}| = |F_{2y}|$ το κοινό μέτρο τους.

Η (3) γίνεται επομένως: $F \cdot L \approx 0 \;\rightarrow\; F = |F_{1y}| = |F_{2y}| \approx 0$ (3α)

Για θεωρητικά αβαρή ράβδο τώρα, οι σχέσεις (1), (2) και (3α) γίνονται ακριβείς ισότητες, με αποτέλεσμα οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ να συμπίπτουν με τις αντίστοιχες συνιστώσες τους στον Χ άξονα, να είναι δηλαδή <u>αντίθετες και συγγραμμικές, κατά τη διεύθυνση του διαμήκη άξονα της ράβδου</u>.




**ii)** Στο προηγούμενο ερώτημα (i) χρησιμοποιήσαμε τον θεμελιώδη νόμο για την κίνηση της ράβδου και οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα ότι στα άκρα της μπορούν να ασκούνται μόνο αντίθετες και κατά τον διαμήκη άξονά της δυνάμεις.

Στο σφαιρίδιο $\Sigma_1$ (που το θεωρούμε υλικό σημείο) ασκούνται το βάρος $m\vec{g}$ και, σύμφωνα με τα προηγούμενα, μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ από τη ράβδο που αποτελεί την αντίδραση της $\vec{F}'$ που δέχεται η ράβδος από το $\Sigma_1$.

Στην αβαρή ράβδο ασκούνται οι οριζόντιες δυνάμεις $\vec{F}'$ από το $\Sigma_1$ και $\vec{F}''$ από τον άξονα περιστροφής Ο. Για τα μέτρα των τριών οριζόντιων δυνάμεων ισχύει προφανώς:

$$|\vec{F}| = |\vec{F}'| = |\vec{F}''| = F$$

Η δύναμη $\vec{F}$ παίζει ρόλο κεντρομόλου και το $\Sigma_1$ έχει κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{L} = \frac{\left(\sqrt{2gL}\right)^2}{L} = 2g \quad (4)$$

Από τον $2^o$ νόμο για την κίνηση του σφαιριδίου έχουμε:

$\Sigma F_y = m \cdot \alpha_\varepsilon \;\rightarrow\; mg = m \cdot \alpha_\varepsilon \;\rightarrow\; \alpha_\varepsilon = g \quad (5)$

και

$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_\kappa \;\rightarrow\; F = m \cdot \alpha_\kappa \;\rightarrow\; \boxed{F = 2mg = 100\ N}$

Τέλος μέσω των (4) και (5), βρίσκουμε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του $\Sigma_1$:

$$\boxed{\alpha = \sqrt{\alpha_\varepsilon^2 + \alpha_\kappa^2} = g\sqrt{5} \approx 22{,}4\ m/s^2} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{\alpha_\kappa}{\alpha_\varepsilon} = 0{,}5 \;\rightarrow\; \boxed{\theta \approx 63^o}$$

**<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>:**

**I)** Παρατηρείστε ότι η αβαρής ράβδος «αναγκάζεται» να ασκήσει δύναμη εξαιτίας της ταχύτητας του σφαιριδίου, συγκρατώντας το έτσι στην κυκλική του τροχιά.

Αν υποθέσουμε ότι αφήναμε ελεύθερο το σύστημα ράβδου – σφαιριδίου να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα από την οριζόντια αυτή θέση, τότε η αρχική του επιτάχυνση θα ήταν $\vec{g}$ αφού θα δεχόταν μόνο το βάρος $m\vec{g}$.

**II)** Η σχέση $\upsilon = \sqrt{2gL}$ που δίνεται στην εκφώνηση για το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου, όταν η ράβδος γίνεται οριζόντια, έχει προκύψει προφανώς από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, και τη μηδενική μάζα της ράβδου:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = U_{\alpha\rho\chi} \;\rightarrow\; \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 = mgL \;\rightarrow\; \upsilon = \sqrt{2gL}$$

Η σχέση αυτή είναι εκφυλισμένη μορφή (λόγω της μηδενικής μάζας της ράβδου) της γενικότερης σχέσης που προκύπτει από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας κατά την κίνηση του *στερεού «ράβδος – σφαιρίδιο»*:

Αν θεωρήσουμε τα δύο αυτά σώματα ως ένα ενιαίο στερεό, τότε το κέντρο μάζας του βρίσκεται σε απόσταση **L** από τον άξονα O, συμπίπτει δηλαδή με το σφαιρίδιο – υλικό σημείο $\Sigma_1$.

Κατά τη στροφική κίνηση ενός τέτοιου στερεού ως προς O ισχύει γενικά:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} = U_{\alpha\rho\chi} \;\rightarrow\; \tfrac{1}{2} \cdot I_{(O)} \cdot \omega^2 = 2gL \;\rightarrow\; \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{1}{3} \cdot ML^2 + m \cdot L^2) \cdot (\upsilon/L)^2 = 2gL$

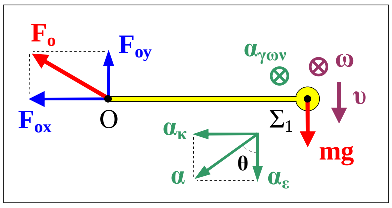
και αν $M \rightarrow 0$ τότε προκύπτει: $\tfrac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 = 2gL$

Αν πάλι θεωρήσουμε την κίνηση του στερεού ως σύνθετη, μεταφορική – στροφική ως προς CM, τότε ισχύει γενικά:

$K_{\tau\varepsilon\lambda} = U_{\alpha\rho\chi} \;\rightarrow\; \tfrac{1}{2} \cdot I_{(CM)} \cdot \omega^2 + \tfrac{1}{2} \cdot (M+m) \cdot \upsilon_{CM}^2 = mgL$

και αν $M \rightarrow 0$ το CM συμπίπτει όπως είπαμε με το υλικό σημείο $\Sigma_1$. Τότε $I_{(CM)} = 0$ και $\upsilon_{CM} = \upsilon$ οπότε προκύπτει πάλι: $\tfrac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 = 2gL$

**III)** Στο ερώτημα (ii) θα μπορούσαμε εναλλακτικά να απαντήσουμε μελετώντας την κίνηση του ενιαίου στερεού «ράβδος – σφαιρίδιο»:




Η κίνηση αυτή είναι στροφική ως προς O, επομένως:

$\Sigma\tau_{(O)} = I_{(O)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \;\rightarrow$

$mgL = (\tfrac{1}{3} \cdot ML^2 + m \cdot L^2) \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{M \rightarrow 0} \alpha_{\gamma\omega\nu} = g/L \quad (6)$

Ισχύει επίσης: $\mathbf{\upsilon = L\cdot\omega} \rightarrow \mathbf{d\upsilon/dt = L\cdot d\omega/dt} \rightarrow \mathbf{\alpha_\varepsilon = L\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}} \xrightarrow{(6)} \mathbf{\alpha_\varepsilon = g}$ (7)

Και από την κίνηση του CM του στερεού, που για $\mathbf{M \rightarrow 0}$ συμπίπτει με το $\Sigma_1$:

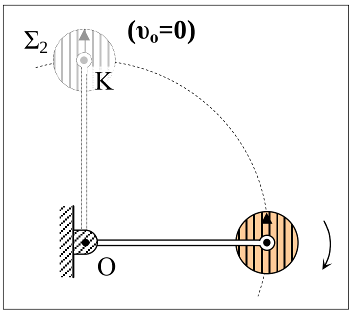
$\mathbf{\Sigma F_y = m\cdot\alpha_\varepsilon} \xrightarrow{(7)} \mathbf{mg - F_{oy} = m\cdot g} \rightarrow \boxed{\mathbf{F_{oy} = 0}}$

$\mathbf{\Sigma F_x = m\cdot\alpha_\kappa} \rightarrow \mathbf{F_{ox} = m\cdot\alpha_\kappa} \xrightarrow{(4)} \boxed{\mathbf{F_{ox} = 2mg = 100\ N}}$

κλπ.

---

**6.** Η αβαρής λεπτή ράβδος του διπλανού σχήματος έχει μήκος **L** και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το ένα της άκρο O και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής της. Στο άλλο της άκρο K είναι στερεωμένος με κατάλληλο μηχανισμό λεπτός ομογενής δίσκος $\Sigma_2$ μάζας **m=5kg** και ακτίνας **R**, ώστε ο άξονάς του να διέρχεται από το K, να μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από αυτόν και το επίπεδό του να συμπίπτει με το επίπεδο περιστροφής της ράβδου.

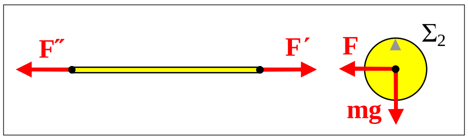



Το σύστημα ισορροπεί αρχικά στην πάνω ακραία θέση, αλλά αρχίζει να κινείται λόγω αστάθειας.

Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα του συστήματος, όταν η ράβδος περνάει από την οριζόντια θέση, και να υπολογίσετε τα μέτρα τους, καθώς και τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος στην ίδια θέση.

**<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>:**

Ο δίσκος $\Sigma_2$ μπορεί να δεχτεί μόνο δυνάμεις που διέρχονται από το κέντρο μάζας του.

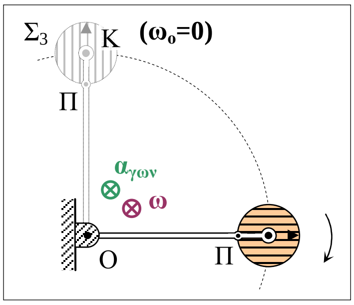



Εφόσον είναι αρχικά ακίνητος, μπορεί να εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση. Συνεπώς μπορούμε αφαιρετικά να τον θεωρήσουμε ως υλικό σημείο $\Sigma_1$ ίδιας μάζας προσκολλημένο στο άκρο K της ράβδου.

Το πρόβλημα <u>ανάγεται λοιπόν στο προηγούμενο</u> (5).

---

**7.** Η αβαρής λεπτή ράβδος του διπλανού σχήματος έχει μήκος **L=2m** και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το ένα της άκρο O και είναι κάθετος στο επίπεδο περιστροφής της. Στο άλλο της άκρο K είναι στερεωμένος με κατάλληλο μηχανισμό λεπτός ομογενής δίσκος $\Sigma_2$ μάζας **m=5kg** και ακτίνας **R=0,4m**, ώστε ο άξονάς του να διέρχεται από το K, να μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από αυτόν και το επίπεδό του να συμπίπτει με το επίπεδο περιστροφής της ράβδου.



Τοποθετούμε στη ράβδο πείρο (ή πίρο) Π, έτσι ώστε να μπορεί να ασκεί στο δίσκο δύναμη εφαπτομένη στην περιφέρειά του, και να τον εμποδίζει να στρέφεται ως προς τη ράβδο.

Το σύστημα ισορροπεί αρχικά στην ανώτερη θέση, αλλά αρχίζει να κινείται λόγω αστάθειας.

**i)** Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος τη στιγμή που η ράβδος περνάει από την οριζόντια θέση.

**ii)** Στην ίδια θέση, να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στα δύο σώματα του συστήματος και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ:**

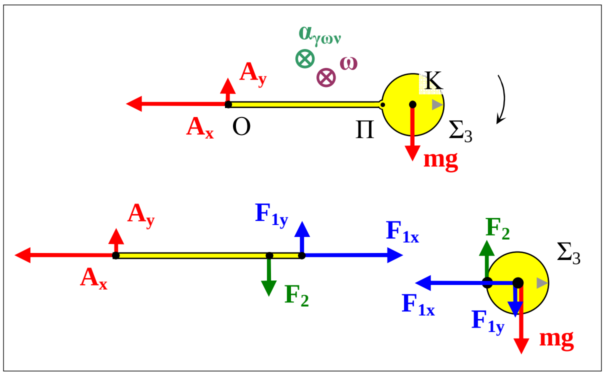
**i)** Χρησιμοποιούμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ως προς Ο στη θέση όπου η ράβδος είναι οριζόντια.

Το σύστημά μας αποτελείται από δύο σώματα που στρέφονται με κοινή γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση αφού αποτελούν ένα ενιαίο στερεό. Η ροπή αδράνειας ως προς το σταθερό άξονα Ο είναι:

$$\mathbf{I_{(O)} = I_{ράβδου} + I_{δίσκου} = (⅓·ML^2) + (½·m·R^2 + m·L^2) \xrightarrow{M\to 0} I_{(O)} = m·(½·R^2 + L^2)}$$

και για τη στροφική κίνηση του στερεού:

$$\mathbf{Σ\tau_{(O)} = I_{(O)}·\alpha_{γων} \rightarrow mg·L = m·(½·R^2+L^2)·\alpha_{γων} \rightarrow \boxed{\alpha_{γων} = \frac{2·g·L}{R^2+2L^2} = 4{,}902\ r/s^2}}$$




**ii)** Υπολογίζουμε πρώτα τη γωνιακή ταχύτητα **ω** στην οριζόντια θέση:

$$\mathbf{U_{τελ} + K_{τελ} = U_{αρχ} + K_{αρχ}} \rightarrow$$

$$\mathbf{mg·L = ½·I_{(O)}·\omega^2} \rightarrow$$

$$\mathbf{\omega = \sqrt{\frac{4·g·L}{R^2+2L^2}} = 3{,}13\ r/s}$$

Για την κίνηση του κέντρου μάζας του στερεού (που συμπίπτει με το Κ του δίσκου) ισχύει:

$$\mathbf{ΣF_x = m·\alpha_κ \rightarrow A_x = m·\omega^2·L \rightarrow A_x = 98\ N}$$

$$\mathbf{ΣF_y = m·\alpha_{cm} \rightarrow mg - A_y = m·\alpha_{γων}·L \rightarrow A_y = 0{,}98\ N}$$

Άρα η δύναμη που ασκεί ο άξονας Ο έχει μέτρο:

$$\boxed{\mathbf{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \approx 98\ N}}$$

Στη συνέχεια μελετάμε ξεχωριστά την κίνηση της (αβαρούς) ράβδου:

$$\mathbf{Σ\tau_{(O)} = 0 \rightarrow F_{1y}·L = F_2·(L - R) \rightarrow F_{1y} = 0{,}8·F_2}$$

$$\mathbf{ΣF_x = 0 \rightarrow \boxed{F_{1x} = A_x = 98\ N}}$$

$$\mathbf{ΣF_y = 0 \rightarrow A_y + F_{1y} - F_2 = 0 \xrightarrow{F_{1y}=0{,}8·F_2} 0{,}2·F_2 = A_y \rightarrow \boxed{F_2 = 4{,}9\ N}}$$

και με αντικατάσταση $\mathbf{F_{1y} = 3{,}92\ N}$

Οπότε οι δυνάμεις που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο στα σημεία Κ και Π έχουν αντίστοιχα μέτρα:

$$\boxed{\mathbf{F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = 98{,}01\ N}} \quad \text{και} \quad \boxed{\mathbf{F_2 = 4{,}9\ N}}$$

Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να μελετήσουμε την κίνηση του δίσκου αντί της ράβδου:

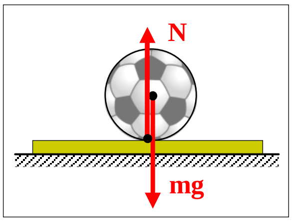
$\mathbf{\Sigma\tau_{(K)} = I_{(K)}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \;\rightarrow\; F_2\cdot R = ½\cdot m\cdot R^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \;\rightarrow\; F_2 = ½\cdot m\cdot R\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} = 4{,}9\ N}$

$\mathbf{\Sigma F_x = m\cdot\alpha_\kappa \;\rightarrow\; F_{1x} = m\cdot\omega^2\cdot L = 98\ N}$

$\mathbf{\Sigma F_y = m\cdot\alpha_{cm} \;\rightarrow\; mg + F_{1y} - F_2 = m\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot L \;\rightarrow\; F_{1y} = 3{,}92\ N}$ κλπ.

---

**8.** Η μπάλα του διπλανού σχήματος έχει μάζα **m=0,5kg** και στέκεται ακίνητη πάνω στη λεία οριζόντια σανίδα του σχήματος.




**i)** Να προσδιορίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη μπάλα.

**ii)** Τι θα άλλαζε αν ο συντελεστής τριβής σανίδας – μπάλας ήταν διάφορος του μηδενός;

(Να θεωρήσετε τη μπάλα ως σφαιρικό φλοιό με τη μάζα κατανεμημένη ομοιόμορφα στην περιφέρεια).

<u>**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**</u>:

**i)** Η μπάλα είναι ακίνητη, και ασκούνται το βάρος και η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{\mathbf{N}}$ του δαπέδου, επομένως ισχύει:

($\mathbf{\Sigma F_x = 0}$ αλλά δεν έχουμε οριζόντιες δυνάμεις)

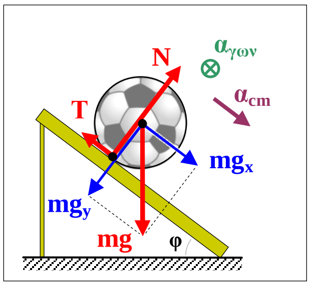
$\mathbf{\Sigma F_y = 0 \;\rightarrow\; N - mg = 0 \;\rightarrow\;} \boxed{\mathbf{N = mg = 5\ N}}$

($\mathbf{\Sigma\tau = 0}$ ως προς κάθε σημείο, αλλά δεν μας χρειάζεται)

**ii)** Η μπάλα είναι ακίνητη, καμία δύναμη δεν τείνει να την κινήσει, επομένως δεν υπάρχει λόγος εμφάνισης τριβής και έτσι δεν αλλάζει τίποτε.

---

**9.** Σε συνέχεια της προηγούμενης εφαρμογής (8), συγκρατούμε ακίνητη τη σανίδα σε κλίση **φ=37°** ως προς το οριζόντιο, και αφήνουμε πάνω της τη μπάλα (**m=0,5kg**) ελεύθερη. Αν έχει ακτίνα **R=0,12m** να προσδιορίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται πάνω της, καθώς και τη μεταφορική και τη γωνιακή της επιτάχυνση, για τρεις διαφορετικές τιμές του συντελεστή τριβής ($\mathbf{\mu_{o\rho} = \mu_{o\lambda}}$):




**i) $\mathbf{\mu = 0}$** **ii) $\mathbf{\mu = 0{,}5}$** **iii) $\mathbf{\mu = 0{,}1}$**

**<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>:**

**i)** Εφόσον δεν μπορεί να αναπτυχθεί τριβή, οι δυνάμεις που ασκούνται στην μπάλα διέρχονται από το κέντρο μάζας της και ισχύει:

$\mathbf{\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \;\rightarrow\; mg \cdot \eta\mu\varphi = m \cdot \alpha_{cm} \;\rightarrow\;} \boxed{\mathbf{\alpha_{cm} = g \cdot \eta\mu\varphi = 6\ m/s^2}}$

$\mathbf{\Sigma F_y = 0 \;\rightarrow\; N - mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \;\rightarrow\;} \boxed{\mathbf{N = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 4\ N}}$

$\mathbf{\Sigma \tau_{(cm)} = 0 \;\rightarrow\;} \boxed{\mathbf{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0}}$ (η μπάλα θα κάνει μεταφορική κίνηση)

**ii)** Η μπάλα, λόγω της συνιστώσας $\mathbf{mg_x}$ του βάρους, τείνει να κινηθεί μεταφορικά. Το σημείο επαφής τείνει να κινηθεί προς τα κάτω, επομένως αναπτύσσεται τριβή αντίθετης φοράς που προκαλεί και στροφική κίνηση.

Υποθέτουμε αυθαίρετα ότι πρόκειται για στατική τριβή και κύλιση χωρίς ολίσθηση, και έχουμε:

Λόγω κύλισης: $\mathbf{\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R}$ (1)

$\mathbf{\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \;\rightarrow\; mg \cdot \eta\mu\varphi - T = m \cdot \alpha_{cm}}$ (2)

$\mathbf{\Sigma F_y = 0 \;\rightarrow\;} \boxed{\mathbf{N = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 4\ N}}$ (3)

$\mathbf{\Sigma \tau_{(cm)} = I_{(cm)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{(1)} T \cdot R = \tfrac{2}{3} \cdot m \cdot R^2 \cdot (\alpha_{cm}/R) \;\rightarrow\; T = \tfrac{2}{3} \cdot m \cdot \alpha_{cm}}$ (4)

Από (2) και (4) βρίσκουμε:

$\boxed{\mathbf{\alpha_{cm} = {}^3/_5 \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = 3,6\ m/s^2}}$ $\boxed{\mathbf{T = 1,2\ N}}$ και από (1) $\boxed{\mathbf{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 30\ r/s^2}}$

Ελέγχουμε τέλος αν είναι σωστή η αρχική υπόθεση:

$\mathbf{T_{o\rho} = \mu \cdot N = 2\ N}$ και προφανώς $\mathbf{T < T_{o\rho}}$ <u>άρα καλώς υποθέσαμε ότι έχουμε κύλιση</u>.

**ii)** Η κάθετη δύναμη από το δάπεδο είναι ίδια όπως πριν:

$$\boxed{\mathbf{N = mg \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 4\ N}}$$

Η οριακή στατική τριβή έχει τώρα μέτρο: $\mathbf{T_{o\rho} = \mu \cdot N = 1\ N}$

Για κύλιση όμως απαιτείται όπως είδαμε πιο πάνω στατική τριβή **T = 1,2 N** που δεν είναι διαθέσιμη. Έτσι η μπάλα θα ολισθαίνει ταυτόχρονα με την περιστροφή της και η αναπτυσσόμενη <u>τριβή ολίσθησης</u> θα έχει μέτρο $\boxed{\mathbf{T = 1\ N}}$

Από τον $2^o$ νόμο έχουμε:

$\mathbf{\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \;\rightarrow\; mg \cdot \eta\mu\varphi - T = m \cdot \alpha_{cm} \;\rightarrow\;} \boxed{\mathbf{\alpha_{cm} = 4\ m/s^2}}$

$\mathbf{\Sigma \tau_{(cm)} = I_{(cm)} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \;\rightarrow\; T \cdot R = \tfrac{2}{3} \cdot m \cdot R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \;\rightarrow\;} \boxed{\mathbf{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 25\ r/s^2}}$

*Διονύσης Μητρόπουλος*