ΓΕΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ
ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ, ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ, ΚΥΡΙΟΙ ΑΞΟΝΕΣ
ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

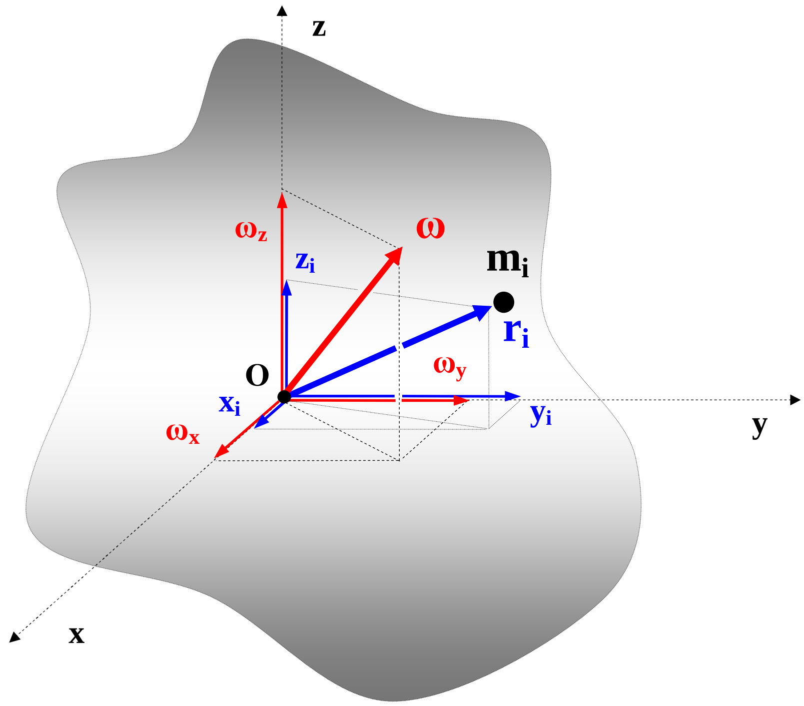
Έστω ότι το στερεό του σχήματος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ γύρω από άξονα που διέρχεται από σταθερό σημείο Ο.

Αν θεωρήσουμε το Ο ως αρχή του συστήματος αναφοράς, τότε το διάνυσμα θέσης στοιχειώδους μάζας $\mathbf{m_i}$ είναι $\vec{r}(x_i, y_i, z_i)$.

Αν είναι $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ τα μοναδιαία διανύσματα των τριών αξόνων, τότε τα διανύσματα $\vec{\omega}$ και $\vec{r}_i$ μπορούν αντίστοιχα να γραφούν:

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{x}\omega_x + \vec{y}\omega_y + \vec{z}\omega_z}$$

και $\boxed{\vec{r}_i = \vec{x}x_i + \vec{y}y_i + \vec{z}z_i}$ **(1)**



ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Η ταχύτητα της μάζας $\mathbf{m_i}$ είναι $\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ και η στροφορμή της ως προς Ο είναι $\vec{\ell}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i$ ή αλλιώς $\vec{\ell}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$. Επομένως, η συνολική ***στροφορμή*** του στερεού σώματος είναι:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\ell}_i \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)} \quad \mathbf{(2)}$$

Από την ιδιότητα του τριπλού εξωτερικού γινομένου:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad \text{και επομένως:} \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{A}) = A^2 \vec{B} - \vec{A}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

προκύπτει:

$$\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = r_i^2 \omega - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) =$$

$$= (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\vec{x}\omega_x + \vec{y}\omega_y + \vec{z}\omega_z) - (\vec{x}x_i + \vec{y}y_i + \vec{z}z_i)(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην **(2)**, και αναδιατάσσοντας παίρνουμε:

$$\vec{L} = \vec{x}L_x + \vec{y}L_y + \vec{z}L_z =$$

$$= \vec{x}\left[\omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i\right] +$$

$$+ \vec{y}\left[-\omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i\right] +$$

$$+ \vec{z}\left[-\omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i - \omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i + \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2)\right] \quad (3)$$

ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ, ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Από τη σχέση (3) φαίνεται ότι τα μέτρα των τριών συνιστωσών της στροφορμής είναι:

$$L_x = \left[+\omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i\right] = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \quad (3\alpha)$$

$$L_y = \left[-\omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i\right] = I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \quad (3\beta)$$

$$L_z = \left[-\omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i - \omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i + \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2)\right] = I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z \quad (3\gamma)$$

Οι όροι I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} είναι οι ***ροπές αδράνειας*** του στερεού, ως προς τους αντίστοιχους άξονες:

$$\boxed{I_{xx} = \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2)}, \quad \boxed{I_{yy} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2)}, \quad \boxed{I_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2)} \quad (4\alpha)$$

Ενώ οι όροι I_{xy}, I_{yx}, I_{xz}, I_{zx}, I_{yz}, I_{zy} ονομάζονται ***γινόμενα αδράνειας***:

$$\boxed{I_{xy} = I_{yx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i}, \quad \boxed{I_{xz} = I_{zx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i}, \quad \boxed{I_{yz} = I_{zy} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i} \quad (4\beta)$$

ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Η σχέση **(3)** μεταξύ των $\vec{L}$ και $\vec{\omega}$ μπορεί να γραφεί και με τη μορφή γινομένου πινάκων:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \text{ή συμβολικά:} \quad \boxed{\vec{L} = [I] \cdot \vec{\omega}} \quad (5)$$

Ο 3×3 πίνακας $[\mathbf{I}]$ είναι ο ***τανυστής αδράνειας*** (τανυστής 2^{ας} τάξης) του στερεού στο σύστημα (Oxyz). Οι ποσότητες $\mathbf{I_{xx}}$, $\mathbf{I_{xy}}$, … λέγονται στοιχεία του πίνακα, ή συνιστώσες του τανυστή αδράνειας.

Οι ροπές αδράνειας $\mathbf{I_{xx}}$, $\mathbf{I_{yy}}$, $\mathbf{I_{zz}}$ ως προς τους τρεις άξονες είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα, ως προς την οποία ο πίνακας είναι συμμετρικός.

Ο ***τανυστής αδράνειας δεν είναι μονόμετρο μέγεθος***, επομένως από τον πολλαπλασιασμό με το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ***δεν προκύπτει συγγραμμικό διάνυσμα***.

Δεν είναι όμως ούτε διανυσματικό μέγεθος ώστε να πρόκειται για το γνωστό εσωτερικό ή εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

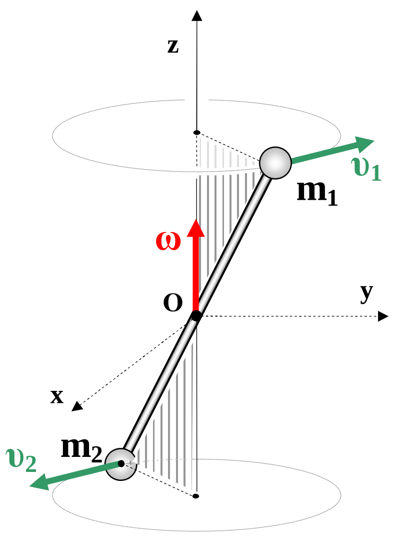
Έτσι, η στροφορμή $\vec{\mathbf{L}}$ δεν είναι γενικά συγγραμμική με τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ παρά μόνο για συγκεκριμένους άξονες περιστροφής, όπως θα δούμε πιο κάτω.

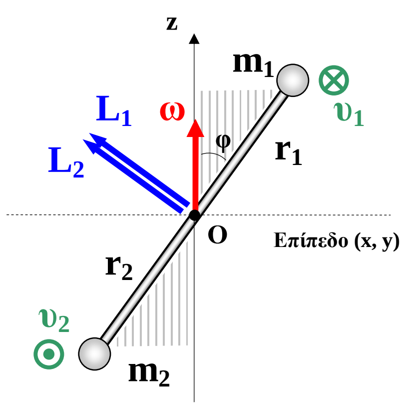
Αυτό μπορούμε εύκολα να το επιβεβαιώσουμε και χωρίς υπολογισμούς με το ακόλουθο απλό παράδειγμα: Οι δύο σφαίρες $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$ είναι ενωμένες με αβαρή ράβδο και το σύστημα στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής που συμπίπτει με τον z άξονα του συστήματος αναφοράς, έτσι ώστε το O να μένει ακίνητο (η ράβδος σχηματίζει σταθερή γωνία $\boldsymbol{\varphi}$ με τον z άξονα ώστε να διαγράφονται δύο κώνοι με κορυφή O). Στο δεξιό σχήμα, το γραμμοσκιασμένο επίπεδο συμπίπτει με τη σελίδα (οι ταχύτητες είναι κάθετες σ' αυτό το επίπεδο).

Παρατηρήστε ότι οι στροφορμές των δύο μαζών ως προς το ακίνητο σημείο O, με μέτρα $\mathbf{L_1= m_1\omega r_1^2 ημφ}$ και $\mathbf{L_2= m_2\omega r_2^2 ημφ}$ δεν είναι συγγραμμικές με τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

Έχουν συνιστώσες ***κατά τον άξονα*** με μέτρα $\mathbf{L_{1z}=m_1\omega r_1^2 ημ^2φ}$ και $\mathbf{L_{2z}=m_2\omega r_2^2 ημ^2φ}$, αλλά έχουν και συνιστώσες πάνω στο (x, y) επίπεδο.

Αν όμως η ράβδος ήταν τοποθετημένη έτσι ώστε να βρίσκεται στο (x, y) επίπεδο (δηλαδή φ=90°) και η περιστροφή γινόταν πάνω του, τότε οι $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$ θα είχαν τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής z και θα ήταν συγγραμμικές με τη γωνιακή ταχύτητα.





ΚΥΡΙΟΙ ΑΞΟΝΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Τρείς κάθετοι ανά δύο άξονες x,y,z, σταθεροί ως προς ένα στερεό (στρεφόμενοι δηλαδή μαζί του), που τέμνονται σε σημείο Ο θεωρούμενο ως αρχή, και είναι τέτοιοι ώστε ***τα γινόμενα αδράνειας ως προς αυτούς να είναι μηδέν***, ονομάζονται ***κύριοι*** ή ***πρωτεύοντες άξονες αδράνειας*** του στερεού στο σημείο Ο. Τα σημείο Ο ονομάζεται πρωτεύον σημείο για τους άξονες αυτούς και τα επίπεδα που ορίζονται από οποιοδήποτε ζευγάρι των αξόνων αυτών ονομάζονται πρωτεύοντα επίπεδα στο σημείο Ο.

Η σχέση **(3)**, με τη βοήθεια των **(3α, 3β, 3γ)**, μετασχηματίζεται στην περίπτωση αυτή στην:

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{x}}\mathbf{L}_x + \vec{\mathbf{y}}\mathbf{L}_y + \vec{\mathbf{z}}\mathbf{L}_z \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{x}}\mathbf{I}_{xx}\boldsymbol{\omega}_x + \vec{\mathbf{y}}\mathbf{I}_{yy}\boldsymbol{\omega}_y + \vec{\mathbf{z}}\mathbf{I}_{xx}\boldsymbol{\omega}_z} \quad \textbf{(6)}$$

Από την **(6)** φαίνεται ότι αν οι περιστροφή γίνεται ως προς κάποιον από τους κύριους άξονες (αν δηλαδή δύο από τις τρεις συνιστώσες $\boldsymbol{\omega}_x$, $\boldsymbol{\omega}_y$, $\boldsymbol{\omega}_z$ είναι μηδενικές), τότε η $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ θα συμπίπτει με την τρίτη συνιστώσα της και η $\vec{\mathbf{L}}$ θα έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτήν. Ισχύει δηλαδή πλέον η γνωστή σχέση $\boxed{\vec{\mathbf{L}} = \mathbf{I}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}}$ **(7)**, όπου η **Ι** είναι βαθμωτό μέγεθος.

Μια σημαντική ιδιότητα δηλαδή ενός κύριου άξονα (που μπορεί να θεωρηθεί και ως ορισμός) είναι ότι ***αν το στερεό περιστρέφεται γύρω από αυτόν, τότε τα διανύσματα*** $\vec{\mathbf{L}}$ ***και*** $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ***είναι συγγραμμικά***.

Μερικές περιπτώσεις όπου μπορούμε εύκολα να αναγνωρίσουμε έναν κύριο άξονα είναι οι εξής:

Α) Αν το στερεό έχει κάποιο επίπεδο συμμετρίας, τότε κάθε άξονας κάθετος σ' αυτό είναι κύριος άξονας στο σημείο τομής του Ο με το επίπεδο.

Β) Αν ένα στερεό «προκύπτει» από περιστροφή γύρω από κάποιο άξονα, τότε ο άξονας αυτός είναι κύριος άξονας σε κάθε σημείο του Ο.

Γ) Αν ένα σώμα είναι επίπεδο (αμελητέου πάχους, π.χ. έχει μορφή ελάσματος) τότε κάθε άξονας κάθετος στο επίπεδό του είναι κύριος άξονας στο σημείο τομής του Ο με το επίπεδο σώμα.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ, ΛΟΓΩ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Η κινητική ενέργεια ενός στερεού, που στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από σταθερό σημείο Ο, μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}\mathbf{m}_i\boldsymbol{\upsilon}_i^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{m}_i(\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{m}_i(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_i)\cdot\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i$$

Με τη βοήθεια της ιδιότητας του τριπλού εσωτερικού γινομένου:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{C}} \cdot (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}})$$

προκύπτει:

$$K = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i) = \tfrac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i \right),$$ και τελικά:

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}} \quad \textbf{(8)}$$

Ή αν χρησιμοποιήσουμε τις συνιστώσες των $\vec{\omega}$ και $\vec{L}$:

$K = \tfrac{1}{2}(\omega_x L_x + \omega_y L_y + \omega_z L_z)$ και με τη βοήθεια των **(3α, 3β, 3γ)**:

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{xz}\omega_x\omega_z - 2I_{yz}\omega_y\omega_z\right)} \quad \textbf{(9)}$$

Και για ***σύστημα κυρίων αξόνων*** (λόγω μηδενισμού των γινομένων αδρανείας):

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2\right)} \quad \textbf{(10)}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(i) Στην περίπτωση που ***η περιστροφή γίνεται γύρω από κύριο άξονα***, τότε με τη βοήθεια και της σχέσης **(7)**, η **(8)** γίνεται:

$$K = \tfrac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I\vec{\omega} \quad \rightarrow \quad K = \tfrac{1}{2}I(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \quad \rightarrow \quad K = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

(ii) Η γενική σχέση **(8)** που βρήκαμε πιο πάνω ισχύει γενικά ***για οποιοδήποτε ακίνητο*** ή ***στιγμιαία ακίνητο σημείο*** από το οποίο διέρχεται ο άξονας περιστροφής (σταθερός ή στιγμιαίος άξονας). Δεδομένου ότι οποιαδήποτε περιστροφή γύρω από ακίνητο ή στιγμιαία ακίνητο σημείο (πλην του CM) είναι στην ουσία μεταφορά και περιστροφή του στερεού, αφού το CM έχει μη μηδενική ορμή, η κινητική ενέργεια που υπολογίζουμε με τη σχέση είναι η συνολική κινητική ενέργεια του στερεού. Μέσα σ' αυτή δηλαδή περιέχεται και η ποσότητα που είχαμε ονομάσει intrinsic energy αλλά και αυτή που οφείλεται στην μεταφορική κίνηση του CM (βλέπε στο τέλος *).

Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τη σχέση **(8)** ***ως προς το CM*** τότε, ***είτε αυτό κινείται είτε όχι***, θα βρούμε μόνο την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής του στερεού γύρω από το κέντρο μάζας του. Αν θέλουμε να βρούμε τη συνολική κινητική ενέργεια του στερεού θα πρέπει τότε να προσθέσουμε και την κινητική του ενέργεια εξαιτίας της μεταφορικής του κίνησης.

***** Η κινητική ενέργεια του στερεού ως προς ακίνητο ή στιγμιαία ακίνητο σημείο, όπως βρήκαμε στη σχέση **(8)**, είναι:

$$K = \tfrac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

Γνωρίζουμε ότι για τη στροφορμή του στερεού ως προς οποιοδήποτε σημείο Ο ενός αδρανειακού συστήματος ισχύει:

$$\vec{\mathbf{L}}_{(O)} = \vec{\mathbf{L}}_{CM\,(O)} + \vec{\mathbf{L}}'_{(CM)}$$

Έτσι η **(8)** γίνεται:

$$\mathbf{K} = \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}\cdot\vec{\mathbf{L}} = \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}\cdot\left(\vec{\mathbf{L}}_{CM\,(O)} + \vec{\mathbf{L}}'_{(CM)}\right) = \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}\cdot\vec{\mathbf{L}}_{CM\,(O)} + \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}\cdot\vec{\mathbf{L}}'_{(CM)} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{K} = \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}\cdot\left(\vec{\mathbf{r}}_{CM}\times\mathbf{M}\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{CM}\right) + \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}\cdot\vec{\mathbf{L}}'_{(CM)} = \tfrac{1}{2}\mathbf{M}\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{CM}\cdot\left(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\mathbf{r}}_{CM}\right) + \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}\cdot\vec{\mathbf{L}}'_{(CM)} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{K} = \tfrac{1}{2}\mathbf{M}\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{CM}\cdot\vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{CM} + \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}\cdot\vec{\mathbf{L}}'_{(CM)}$$ και τελικά:

$$\boxed{\mathbf{K} = \tfrac{1}{2}\mathbf{M}\boldsymbol{\upsilon}_{CM}^{2} + \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}\cdot\vec{\mathbf{L}}'_{(CM)}}$$

Διονύσης Μητρόπουλος