# Έργο δύναμης, Έργο πολλών δυνάμεων, Έργο συνισταμένης δύναμης, ΘΜΚΕ

Η ανάρτηση αυτή είχε σαν αφορμή συζητήσεις που έγιναν και παλαιότερα, αλλά και πρόσφατα, στο δίκτυο σχετικά με τη χρήση του Θεωρήματος Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (ΘΜΚΕ), καθώς και με τη δυνατότητα εναλλακτικού υπολογισμού των έργων των δυνάμεων με τη χρήση της συνισταμένης τους.

## Α. Συστήματα Δυνάμεων

Οποιοδήποτε σύστημα δυνάμεων ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3,\ \ldots$) μπορεί να αναχθεί ισοδύναμα σε πολλά άλλα συστήματα ($\vec{F}_O, \vec{\tau}_O$) μιας μόνο δύναμης και μιας ροπής ζεύγους (*pure torque, couple*), όπου το Ο μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο επιλογής μας, και οι $\vec{F}_O$ και $\vec{\tau}_O$ είναι τα διανυσματικά αθροίσματα:

$$\vec{F}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots \quad \text{και} \quad \vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{1,O} + \vec{\tau}_{2,O} + \vec{\tau}_{3,O} + \ldots$$

(Αν το αρχικό σύστημα περιλαμβάνει και ροπές ζεύγους, τότε αυτές συμπεριλαμβάνονται στην $\vec{\tau}_O$.)

Ο φορέας της $\vec{F}_O$ διέρχεται από το Ο και οι $\vec{F}_O$ και $\vec{\tau}_O$ μπορεί να σχηματίζουν οποιαδήποτε γωνία μεταξύ τους.

Στην ειδική περίπτωση που οι $\vec{F}_O$, $\vec{\tau}_O$ είναι κάθετες μεταξύ τους, όπως συμβαίνει π.χ. όταν οι $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, … είναι ***συντρέχουσες***, ***ομοεπίπεδες*** ή ***παράλληλες***, τότε το σύστημα μπορεί να αναχθεί σε ***μία μοναδική δύναμη*** $\vec{F}_O$ (και μηδενική ροπή). Η δύναμη αυτή έχει συγκεκριμένο φορέα, που μπορεί να προσδιοριστεί κατά τα γνωστά.

Στην αγγλική ορολογία, για την $\vec{F}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$ χρησιμοποιούνται οι όροι ***net***, ***total*** ή ***unbalanced force***. Για το κάθε ισοδύναμο σύστημα ($\vec{F}_O, \vec{\tau}_O$) χρησιμοποιείται ό όρος ***resultant force–couple*** ή και σκέτο ***resultant***. Στην ειδική περίπτωση που το σύστημα των δυνάμεων ανάγεται σε μία μόνο δύναμη $\vec{F}$, τότε αυτή είναι ταυτόχρονα και η «*net force*» αλλά και η «*resultant force*».

Επίσης, για τη συνισταμένη των δυνάμεων $m\vec{a}$ σε υλικό σημείο χρησιμοποιείται και ο όρος ***effective force*** (δεν γνωρίζω καθιερωμένο αντίστοιχο ελληνικό όρο).

Στη γλώσσα μας, για την $\vec{F}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$ χρησιμοποιούμε τον όρο ***συνισταμένη δύναμη*** ή ***συνολική δύναμη***, που είναι πιστεύω το αντίστοιχο του όρου «*net force*». Επειδή όμως η έννοια «*συνισταμένη δύναμη*» εισάγεται μέσα από τη δυναμική του υλικού σημείου, αναφέρεται δηλαδή σε σύστημα συντρεχουσών δυνάμεων (και μάλιστα ομοεπιπέδων), η συνισταμένη (ως *net force*) τυγχάνει να είναι ταυτόχρονα και η *resultant force*, αυτή που μπορεί να αντικαταστήσει ισοδύναμα όλες τις άλλες δυνάμεις.

Μένει έτσι η αίσθηση ότι η συνισταμένη είναι αυτή που μπορεί πάντα να αντικαταστήσει ισοδύναμα όλες τις άλλες δυνάμεις, κάτι που δεν είναι όμως γενικά ορθό. Αν θέλουμε να χρησιμοποιούμε τον όρο «*συνισταμένη*» με την έννοια «*resultant*», τότε στη γενική περίπτωση η συνισταμένη δεν είναι μόνο δύναμη, αλλά δύναμη και ροπή ζεύγους.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον όρο ***συνισταμένη*** ή ***συνολική δύναμη*** για το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων με την έννοια «*net force*» και όχι «*resultant*».

Σημειώνεται ακόμα ότι για την ισοδυναμία των συστημάτων δυνάμεων χρησιμοποιούνται στην αγγλική ορολογία οι όροι ***equivalent*** και ***equipollent***. Και οι δύο όροι αναφέρονται σε συστήματα δυνάμεων που μπορούν να αναχθούν στο ίδιο σύστημα ($\vec{F}_O, \vec{\tau}_O$).

Έχουν όμως την εξής διαφοροποίηση:

- Ο όρος «*equivalent*» χρησιμοποιείται σε συστήματα δυνάμεων που ασκούνται στο ίδιο υλικό σημείο ή ιδανικό στερεό. Τέτοια συστήματα επιφέρουν προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα στην κίνησή του.
- Ο όρος «*equipollent*» χρησιμοποιείται σε συστήματα δυνάμεων που ασκούνται σε σύστημα υλικών σημείων ή σε πραγματικό στερεό (παραμορφώσιμο). Στην περίπτωση αυτή τα αποτελέσματα της δράσης του κάθε συστήματος δυνάμεων είναι διαφορετικά, παρόλο που η συνισταμένη δύναμη και ροπή είναι ίδια.

Δεν γνωρίζω αν υπάρχει παρόμοια διάκριση στη γλώσσα μας, δεν μπόρεσα να βρω κάτι σχετικό.

## Β. Σημείο εφαρμογής της Συνισταμένης δύναμης

Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα έχουν ορισμένο σημείο εφαρμογής (*εφαρμοστά διανύσματα*).

Η δύναμη όμως σαν φυσικό μέγεθος είναι ένα *ολισθαίνον διάνυσμα*, μπορεί να ασκείται ισοδύναμα σε οποιοδήποτε σημείο του φορέα της.

Κατά την διαδικασία εύρεσης της συνισταμένης πολλών δυνάμεων, προσδιορίζουμε τον φορέα της, αλλά η επιλογή του σημείου εφαρμογής πάνω σ' αυτόν είναι αυθαίρετη. Ακόμα και στα συστήματα δυνάμεων που ανάγονται ισοδύναμα σε μία μόνο δύναμη $\vec{F}$, η επιλογή του σημείου εφαρμογής αποτελεί μία σύμβαση (δεχόμαστε ότι η $\vec{F}$ ασκείται στο …).

Για παράδειγμα:

- Στην περίπτωση συντρεχουσών δυνάμεων που ασκούνται σε υλικό σημείο, ο φορέας της $\vec{F}$ περνάει πάντα από το υλικό σημείο, το οποίο και θεωρούμε ως σημείο εφαρμογής της.
- Στα συστήματα παραλλήλων εφαρμοστών δυνάμεων, ο φορέας της $\vec{F}$ διέρχεται πάντα από το *κέντρο των παραλλήλων δυνάμεων*, (ανεξάρτητο στροφής των παραλλήλων) και το θεωρούμε ως το σημείο εφαρμογής της. Τέτοια περίπτωση αποτελεί και το κέντρο βάρους ενός σώματος όταν αυτό βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας.

Γενικά όμως, σε ένα σύστημα υλικών σημείων ή σε ένα στερεό σώμα, η επιλογή του σημείου εφαρμογής είναι αυθαίρετη, ή γίνεται κατά σύμβαση. Τέτοια είναι π.χ. η αναγωγή σε ένα σύστημα δύναμης / ροπής ($\vec{F}_{CM}, \vec{\tau}_{CM}$), η επιλογή του CM δηλαδή ως σημείου εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης, η οποία απλοποιεί την εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα.

## Γ. Υλικό σημείο – Έργο δύναμης – Κινητική ενέργεια – ΘΜΚΕ

Το έργο δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται σε υλικό σημείο Σ ορίζεται από τη σχέση:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\, \delta t \quad (1)$$

και με ολοκλήρωση κατά μήκος τροχιάς C, όπου $\vec{r}(t)$ και $\vec{\upsilon}(t)$ η θέση και η ταχύτητα του Σ στο σύστημα αναφοράς του:

$$W = \sum \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad (2)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τον $2^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{dt} \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t = \vec{\upsilon} \cdot \mathrm{d}\left(m\vec{\upsilon}\right) = \frac{m}{2}\mathrm{d}\left(\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}\right) = \frac{m}{2}\mathrm{d}\left(\upsilon^2\right) \quad (3)$$

και με ολοκλήρωση:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{m}{2}\mathrm{d}\left(\upsilon^2\right) \quad \rightarrow \quad W = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \quad ή \quad W = \Delta K \quad (4)$$

Προκύπτει δηλαδή το ΘΜΚΕ για την κίνηση του υλικού σημείου Σ, με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ και αποτελεί την ολοκληρωτική μορφή του $2^{ου}$ νόμου για το Σ.

Νομίζω ότι από εδώ προέκυψε και η ανάγκη εισαγωγής της ποσότητας $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ ως «*κινητικής ενέργειας υλικού σημείου*», αλλά και της φυσικής σημασίας του έργου ως «*ενέργειας που μεταφέρεται …*».

Η σχέση $K = \int \vec{\upsilon} \cdot \mathrm{d}\vec{p}$ αποτελεί γενικότερο ορισμό που καλύπτει και τη σχετικιστική κινητική ενέργεια. Για $m$ = σταθ. ($\upsilon << c$) προκύπτει η $K = \int_0^{\upsilon} \vec{\upsilon} \cdot \mathrm{d}\left(m\vec{\upsilon}\right) = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad (5)$

## Δ. Υλικό σημείο – Έργο πολλών δυνάμεων – ΘΜΚΕ

Αν σε υλικό σημείο Σ ασκούνται δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, … τότε μπορούν να αντικατασταθούν ισοδύναμα από μια συνισταμένη δύναμη $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$, που ασκείται στο Σ (και μηδενική ροπή ζεύγους).

Ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα αναφέρεται τώρα στη συνισταμένη $\vec{F}$, επομένως και το ΘΜΚΕ για το Σ θα έχει πάλι τη μορφή $W = \Delta K$ όπου $W$ το έργο της συνισταμένης. Ισχύει όμως:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \ldots\right) \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t + \ldots \quad \rightarrow \quad W = W_1 + W_2 + \ldots \quad (6)$$

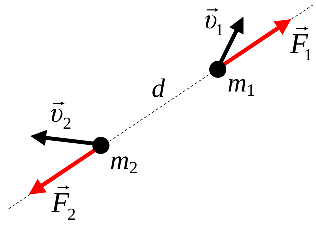
Για ένα ***υλικό σημείο*** δηλαδή, το ***έργο της συνισταμένης*** είναι ***ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων*** όλων των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό. Έτσι το ΘΜΚΕ για το Σ παίρνει τη μορφή:

$$W_1 + W_2 + \ldots = \Delta K \quad ή \quad \sum W_i = \Delta K \quad (7)$$

Οι μορφές του ΘΜΚΕ $\boxed{W = \Delta K}$ και $\boxed{\sum W_i = \Delta K}$ είναι δηλαδή ***ισοδύναμες*** για το υλικό σημείο, κάτι που είναι αναμενόμενο αφού το σημείο εφαρμογής είναι κοινό.

Το ΘΜΚΕ λοιπόν εφαρμοζόμενο σε υλικό σημείο περιγράφει τον ισολογισμό της ενέργειας μετά από κάθε ανταλλαγή ενέργειας με το περιβάλλον του.

## Ε. Έργο δύο αντιθέτων συγγραμμικών δυνάμεων που ασκούνται σε διαφορετικά υλικά σημεία




Ας θεωρήσουμε δύο δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ που ασκούνται σε δύο υλικά σημεία $m_1$, $m_2$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να έχουν πάντα τον ίδιο φορέα και να είναι $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Το έργο της κάθε μίας σε χρονικό διάστημα $\Delta t$ είναι:

$$W_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 \,\mathrm{d}t \quad \text{και} \quad W_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 \cdot \vec{\upsilon}_2 \,\mathrm{d}t$$

και το συνολικό έργο:

$$W_{ολ} = W_1 + W_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 \,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 \cdot \vec{\upsilon}_2 \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 \,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\upsilon}_2 \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 \cdot (\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2) \mathrm{d}t$$

Δηλαδή, αν $\vec{\upsilon}_{ij}$ είναι η σχετική ταχύτητα του υλικού σημείου i ως προς το j, τότε:

$$\boxed{W_{ολ} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 \cdot \vec{\upsilon}_{12} \,\mathrm{d}t} \quad \text{ή} \quad \boxed{W_{ολ} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 \cdot \vec{\upsilon}_{21} \,\mathrm{d}t} \quad (8)$$

Βλέπουμε ότι το συνολικό έργο των αντιθέτων συγγραμμικών $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$:

- ***Είναι διάφορο του μηδενός***, παρόλο που οι δύο δυνάμεις έχουν μηδενική συνισταμένη δύναμη και ροπή ζεύγους.
- ***Είναι μηδενικό*** μόνο στην περίπτωση που ***η σχετική ταχύτητα των δύο υλικών σημείων είναι μηδενική***, όταν δηλαδή η ***απόστασή τους d παραμένει σταθερή***.
- ***Είναι το ίδιο για όλους τους παρατηρητές***, αφού εξαρτάται από τη ***σχετική ταχύτητα*** των δύο υλικών σημείων.

Από τις πιο πάνω ιδιότητες προκύπτουν μερικές σημαντικές προεκτάσεις για τις ***εσωτερικές δυνάμεις*** σε ένα σύστημα:

**α)** Το ***έργο των εσωτερικών δυνάμεων*** είναι γενικά ***διάφορο του μηδενός***.

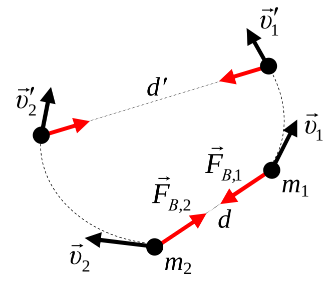
**β)** Μηδενικό είναι μόνο στην περίπτωση που η απόσταση των δύο σημείων εφαρμογής σε κάθε ζευγάρι αλληλεπίδρασης παραμένει σταθερή ($\vec{\upsilon}_{σχ} = 0$). Τυπικές είναι οι περιπτώσεις όπου οι δυνάμεις είναι ή λειτουργούν σαν ***δεσμικές***. Για παράδειγμα, **i)** οι εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ των δομικών λίθων στο ιδανικό στερεό, **ii)** οι δυνάμεις στατικής τριβής που δεν επιτρέπουν τη σχετική ολίσθηση σε ένα σύστημα δύο σωμάτων, **iii)** οι τάσεις που ασκεί ένα τεντωμένο νήμα μαζί με τις αντιδράσεις τους, κλπ.

**γ)** Στις περιπτώσεις που ένα τέτοιο ζευγάρι δυνάμεων δεν είναι δεσμικό, αλλά ***επιβεβλημένο*** (δυνάμεις που ακολουθούν κάποιο νόμο), το συνολικό έργο των δύο δυνάμεων σχετίζεται με ***εσωτερική μετατροπή κάποιας μορφής ενέργειας σε κινητική ή αντίστροφα***.

Γι' αυτό εξάλλου διευκολύνει η ***εναλλακτική χρήση της ΑΔΜΕ*** ή γενικότερα της ***ΑΔΕ*** αντί του ΘΜΚΕ σε ένα ενεργειακά κλειστό σύστημα.

Ενδεικτικά παραδείγματα είναι τα πιο κάτω:

- Ένα ζεύγος ***βαρυτικών (ή ηλεκτροστατικών) αλληλεπιδράσεων*** σε ένα σύστημα δύο υλικών σημείων μετατρέπει μέσω του συνολικού του έργου τη βαρυτική (ή ηλεκτρική) δυναμική ενέργεια σε κινητική ή αντίστροφα:



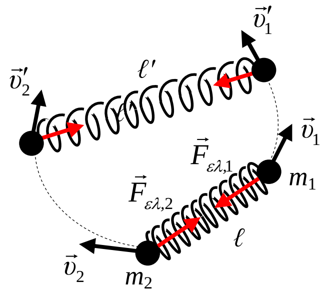

$$W_1 = \Delta K_1 \;\text{ και }\; W_2 = \Delta K_2 \;\rightarrow\; W_1 + W_2 = \Delta K_1 + \Delta K_2 \;\rightarrow\; W_{ολ} = \Delta K_{συστ}$$

$$\text{αλλά }\; W_{ολ} = -\Delta U_{συστ} \;,\; \text{ οπότε } \boxed{\Delta U_{συστ} + \Delta K_{συστ} = 0} \quad (9)$$

σχέση που εκφράζει την ΑΔΜΕ στο σύστημα:

$$-\frac{G\,m_1 m_2}{d} + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = -\frac{G\,m_1 m_2}{d'} + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \quad (10)$$

- Με παρόμοιο τρόπο, αν και η αλληλεπίδραση είναι πιο σύνθετη, σε ένα σύστημα δύο ***σωμάτων στερεωμένων στα άκρα ιδανικού ελατηρίου***, πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, συμβαίνει μετατροπή της κινητικής ενέργειας των σωμάτων σε δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου ή αντίστροφα.




Τα ζεύγη δράσης – αντίδρασης που ασκούνται μεταξύ κάθε σώματος και του αντίστοιχου άκρου του ελατηρίου μεταφέρουν απλώς ενέργεια από το κάθε σώμα στο ελατήριο ή αντίστροφα. Στο σχήμα φαίνονται μόνο οι τάσεις του ιδανικού ελατηρίου που ασκούνται στα δύο σώματα μεταβάλλοντας την κινητική τους ενέργεια, οι οποίες ακολουθούν το νόμο του Hooke. Όπως πριν:

$$W_1 = \Delta K_1 \;\text{ και }\; W_2 = \Delta K_2 \;\rightarrow\; W_1 + W_2 = \Delta K_1 + \Delta K_2 \;\rightarrow\; W_{ολ} = \Delta K_{συστ}$$

$$\text{αλλά }\; W_{ολ} = -\Delta U_{ελ} \;\text{ οπότε πάλι }\; \boxed{\Delta U_{ελ} + \Delta K_{συστ} = 0} \quad (11) \;\text{ και τελικά:}$$

$$\frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}k\left(\ell' - \ell_0\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \quad (12)$$

- Αντίστοιχη είναι η περίπτωση του ζεύγους των κρουστικών δυνάμεων κατά την ***ελαστική κρούση***. Το έργο του ζευγαριού σε κάθε μικρό χρονικό διάστημα δ$t$, όσο δεν έχει ολοκληρωθεί ακόμα η κρούση, είναι $\delta W = -\delta U_{ελαστ.παρ.}$ ενώ το συνολικό έργο κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι μηδέν κι έτσι:

$$W_{ολ} = \Delta K_{συστ} \;\rightarrow\; \boxed{\Delta K_{συστ} = 0} \;\text{ ή όπως συνηθίζεται }\; K_{πριν} = K_{μετά} \quad (13)$$

Στην ***πλαστική κρούση*** όμως είναι πάντα αρνητικό $\delta W = -\delta E_{θερμ}$ και $W_{ολ} = -\Delta E_{θερμ}$. Έχουμε δηλαδή αύξηση της θερμικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων:

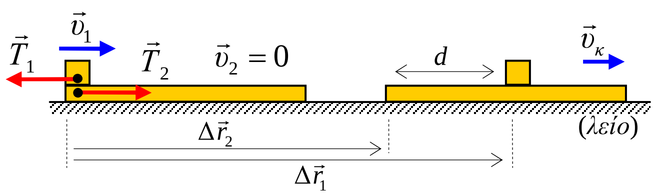
$$\boxed{\Delta K_{συστ} + \Delta E_{θερμ} = 0} \;\text{ που εκφράζει την ΑΔΕ, ή όπως συνηθίζεται }\; K_{πριν} = K_{μετά} + Q \quad (14)$$

Αντίθετα, σε μια ***διάσπαση*** σε δύο κομμάτια (π.χ. μέσω εκρηκτικού μηχανισμού), το έργο των εσωτερικών δυνάμεων που ωθούν τα θραύσματα είναι $W_{ολ} = -\Delta E_{χημ} = \Delta K_{συστ}$. Μετράει δηλαδή το μέρος της χημικής ενέργειας $\Delta E_{χημ}$ του συστήματος που μετατράπηκε σε κινητική:

$$\boxed{\Delta E_{χημ} + \Delta K_{συστ} = 0} \quad (15)$$

Γενικότερα ισχύει βέβαια: $-\Delta E_{ολ,χημ} = W_{ολ} + \Delta E_{θερμ} \;\rightarrow\; \boxed{\Delta E_{ολ,χημ} + \Delta K_{συστ} + \Delta E_{θερμ} = 0}$ (16)

- Σαν τελευταίο παράδειγμα, μπορούμε ακόμα να δούμε το ζεύγος ***δυνάμεων τριβής ολίσθησης*** ανάμεσα σε δύο κινούμενα σώματα.




Είναι $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T$. Για τα έργα των δύο δυνάμεων έχουμε:

$$W_1 = \vec{T}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 = -T\left|\Delta\vec{r}_1\right| = \Delta K_1 \quad ,$$

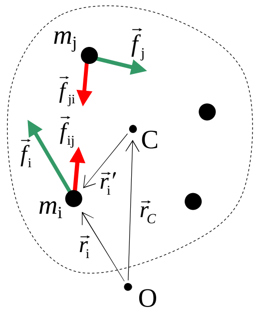
$$W_2 = \vec{T}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2 = +T|\Delta \vec{r}_2| = \Delta K_2$$

και $$W_{ολ} = W_1 + W_2 = -T\left(|\Delta \vec{r}_1| - |\Delta \vec{r}_2|\right) = -Td = \Delta K_1 + \Delta K_2 = \Delta K_{συστ}$$

αλλά $W_{ολ} = -\Delta E_{θερμ}$ οπότε: $\boxed{\Delta E_{θερμ} + \Delta K_{συστ} = 0}$ ή και $K_{αρχ} = K_{τελ} + Q$ (17)

## ΣΤ. Σύστημα σωματιδίων – Κινητική ενέργεια – Έργο δυνάμεων – ΘΜΚΕ

Θεωρούμε σύστημα N σωματιδίων $m_1$, $m_2$, …, $m_N$ με συνολική μάζα $M = \sum_i m_i$.




Έστω $\vec{f}_i$ η (συνολική) εξωτερική δύναμη που ασκείται στο $m_i$ και $\vec{f}_{ij}$ (με $i \neq j$) η εσωτερική στο $m_i$ από το $m_j$. Έστω ακόμα, $\vec{r}_i$, $\vec{r}_C$ οι θέσεις των σωματιδίων και του κέντρου μάζας τους C στο σύστημα αναφοράς O και $\vec{r}_i'$ οι θέσεις τους ως προς το C. Τότε ισχύει: $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_C$.

Επίσης, αν $\vec{\upsilon}_i$, $\vec{\upsilon}_C$ και $\vec{\upsilon}_i'$ είναι οι αντίστοιχες ταχύτητες, ισχύει $\vec{\upsilon}_i' = \vec{\upsilon}_i - \vec{\upsilon}_C$.

### ΣΤ-1. Κινητική ενέργεια του Συστήματος

Από τη σχέση $\vec{\upsilon}_i' = \vec{\upsilon}_i - \vec{\upsilon}_C$ προκύπτει:

$$\vec{\upsilon}_i^2 = (\vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_i')^2 = \vec{\upsilon}_C^2 + \vec{\upsilon}_i'^2 + 2\vec{\upsilon}_C \cdot \vec{\upsilon}_i' \quad \rightarrow \quad \upsilon_i^2 = \upsilon_C^2 + \upsilon_i'^2 + 2\vec{\upsilon}_C \cdot \vec{\upsilon}_i' \qquad (18)$$

Η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων στο σύστημα αναφοράς O είναι:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \upsilon_C^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \upsilon_i'^2 + \sum_i m_i \vec{\upsilon}_C \cdot \vec{\upsilon}_i' \quad \text{ή αλλιώς:}$$

$$K = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right)\upsilon_C^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \upsilon_i'^2 + \vec{\upsilon}_C \cdot \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i'$$

Ο τελευταίος όρος εκφράζει τη συνολική ορμή των N σωματιδίων ως προς το C που είναι μηδέν, οπότε η πιο πάνω σχέση γίνεται:

$$\boxed{K = \tfrac{1}{2} M \upsilon_C^2 + \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \upsilon_i'^2} \qquad (19)$$

Στη σχέση αυτή, ο πρώτος όρος του 2ου μέλους είναι η κινητική ενέργεια της συνολικής μάζας των σωματιδίων αν αυτή θεωρηθεί συγκεντρωμένη στο C και κινείται με την ταχύτητα του C ως προς το εξωτερικό σύστημα O.

Το άθροισμα που εμφανίζεται στο 2ο μέλος της σχέσης εκφράζει την κινητική ενέργεια των σωματιδίων ως προς το κέντρο μάζας τους C. Το άθροισμα αυτό χαρακτηρίζεται συχνά ως «*εσωτερική κινητική ενέργεια*» του συστήματος των σωματιδίων και είναι το μόνο τμήμα της κινητικής τους ενέργειας που μπορεί να μετασχηματιστεί με *εσωτερικές διεργασίες* σε άλλες μορφές. Σε μια πλαστική κρούση δύο σωμάτων π.χ. αυτό είναι το μέρος της κινητικής τους ενέργειας που μετασχηματίζεται σε θερμική.

Αν λοιπόν θέσουμε $K_C = \tfrac{1}{2} M \upsilon_C^2$ και $K' = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \upsilon_i'^2$ τότε η (19) γίνεται:

$$\boxed{K = K_C + K'} \qquad (20)$$

## ΣΤ-2. Έργο δυνάμεων

Για το έργο οποιασδήποτε δύναμης $\vec{f}$ από αυτές που ασκούνται στα σωματίδια ισχύει:

$$w=\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}\cdot\vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}\cdot(\vec{\upsilon}_C+\vec{\upsilon}\,')\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}\cdot\vec{\upsilon}_C\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}\cdot\vec{\upsilon}\,'\,\mathrm{d}t=w_C+w' \quad (21)$$

όπου οι όροι $w_C$ και $w'$ εκφράζουν ο μεν 1ος το έργο της δύναμης $\vec{f}$ αν το σωματίδιο κινείτο με την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_C$ του κέντρου μάζας, ο δε 2ος το έργο της ίδιας δύναμης ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος.

Το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στα σωματίδια είναι $W_{o\lambda}=W_{\varepsilon\xi}+W_{\varepsilon\sigma}$ (22)

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τον κάθε όρο.

***Εξωτερικές δυνάμεις:***

$$W_{\varepsilon\xi}=\sum_{\mathrm{i}}w_{\mathrm{i}}=\sum_{\mathrm{i}}\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}_{\mathrm{i}}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t=\sum_{\mathrm{i}}\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}_{\mathrm{i}}\cdot(\vec{\upsilon}_C+\vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}')\mathrm{d}t=\sum_{\mathrm{i}}w_{\mathrm{i}C}+\sum_{\mathrm{i}}w_{\mathrm{i}}' \;\rightarrow\; \boxed{W_{\varepsilon\xi}=W_C+W_{\varepsilon\xi}'} \quad (23)$$

Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι δηλαδή ίσο με το άθροισμα δύο όρων. Ο 1ος όρος $W_C$ εκφράζει το έργο τους αν όλες ασκούντο στο κέντρο μάζας C, ή διαφορετικά το έργο της συνισταμένης τους, αν αυτή ασκείται στο C. Ο 2ος όρος $W'_{\varepsilon\xi}$ εκφράζει το έργο τους ως προς το κέντρο μάζας.

Επισημαίνεται ότι μέσα στους δύο αυτούς προσθετέους ***μπορεί να περιλαμβάνονται και ψευδοέργα***.

***Εσωτερικές δυνάμεις:***

Το έργο καθενός από τα ζεύγη εσωτερικών δυνάμεων $\vec{f}_{\mathrm{ij}}$, $\vec{f}_{\mathrm{ji}}$ (για τα οποία ισχύει $\vec{f}_{\mathrm{ij}}=-\vec{f}_{\mathrm{ji}}$) είναι:

$$w_{\mathrm{ij}}+w_{\mathrm{ji}}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}_{\mathrm{ij}}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}_{\mathrm{ji}}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{j}}\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}_{\mathrm{ij}}\cdot(\vec{\upsilon}_C+\vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}')\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\left(-\vec{f}_{\mathrm{ij}}\right)\cdot\left(\vec{\upsilon}_C+\vec{\upsilon}_{\mathrm{j}}'\right)\mathrm{d}t \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; w_{\mathrm{ij}}+w_{\mathrm{ji}}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{f}_{\mathrm{ij}}-\vec{f}_{\mathbf{ji}}\right)\cdot\vec{\upsilon}_C\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}_{\mathrm{ij}}\cdot(\vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}'-\vec{\upsilon}_{\mathrm{j}}')\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}_{\mathrm{ij}}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{ij}}'\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}_{\mathrm{ji}}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{ji}}'\,\mathrm{d}t$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το κάθε ζεύγος εσωτερικών δυνάμεων, *α)* δεν παράγει έργο επί του κέντρου μάζας C και *β)* έχει συνολικό έργο που εξαρτάται, όπως είχαμε δει και πιο πάνω, μόνο από τη σχετική κίνηση των δύο σημείων εφαρμογής, αφού $\vec{\upsilon}_{\mathrm{ij}}'=\vec{\upsilon}_{\mathrm{ij}}$. Έτσι, το συνολικό έργο των εσωτερικών δυνάμεων είναι:

$$W_{\varepsilon\sigma}=W_{\varepsilon\sigma}'=\sum_{\mathrm{i}}\sum_{\mathrm{j}}\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}_{\mathrm{ij}}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}t=\sum_{\mathrm{i}}\sum_{\mathrm{j>i}}\int_{t_1}^{t_2}\vec{f}_{\mathrm{ij}}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{ij}}\,\mathrm{d}t \quad (24)$$

Οπότε, το συνολικό έργο όλων των δυνάμεων που ασκούνται στα σωματίδια μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τριών προσθετέων:

$$\boxed{W_{o\lambda}=W_C+W_{\varepsilon\xi}'+W_{\varepsilon\sigma}} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \boxed{W_{o\lambda}=W_C+W_{\varepsilon\xi}'+W_{\varepsilon\sigma}'} \quad (25)$$

## ΣΤ-3. Το ΘΜΚΕ για το Κέντρο μάζας του Συστήματος

Αν θεωρήσουμε ότι όλες οι δυνάμεις ασκούνται στο C τότε οι εσωτερικές έχουν μηδενική συνισταμένη και απομένουν οι εξωτερικές, $\vec{F} = \sum_{\mathrm{i}} \vec{f}_{\mathrm{i}}$ που επί του C παράγουν έργο $W_C$ όπως είδαμε στην (23).

Έτσι, το ΘΜΚΕ για την κίνηση του κέντρου μάζας C γίνεται:

$$\boxed{W_C = \Delta K_C} \quad (26)$$

Δηλαδή η κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας μεταβάλλεται μέσω του έργου της συνισταμένης των εξωτερικών δυνάμεων, ασκουμένης στο C.

## ΣΤ-4. Το ΘΜΚΕ για το Σύστημα των σωματιδίων

Το ΘΜΚΕ ισχύει για κάθε σωματίδιο του συστήματος με τη μορφή: $w_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{j}} w_{\mathrm{ij}} = \Delta K_{\mathrm{i}}$

Τα εμπλεκόμενα μεγέθη είναι βαθμωτά, οπότε με πρόσθεση για όλα τα σωματίδια προκύπτει:

$$\sum_{\mathrm{i}} w_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{i}} \sum_{\mathrm{j}} w_{\mathrm{ij}} = \sum_{\mathrm{i}} \Delta K_{\mathrm{i}} \quad \rightarrow \quad \boxed{W_{\varepsilon\xi} + W_{\varepsilon\sigma} = \Delta \mathrm{K}} \quad (27)$$

Εναλλακτικά, με χρήση των (20) και (25): $W_C + W'_{\varepsilon\xi} + W_{\varepsilon\sigma} = \Delta K_C + \Delta K'$ (28)

Σε συνδυασμό με την (26) προκύπτει ότι: $\boxed{W'_{\varepsilon\xi} + W_{\varepsilon\sigma} = \Delta K'}$ (29)

Η «εσωτερική» κινητική ενέργεια του συστήματος μεταβάλλεται δηλαδή και μέσω του έργου των εσωτερικών δυνάμεων (εσωτερικές μετατροπές ενέργειας), αλλά και μέσω του έργου των εξωτερικών ως προς το κέντρο μάζας.

## ΣΤ-5. Το ΘΜΚΕ για το Μηχανικό στερεό

Στην περίπτωση που τα N σωματίδια αποτελούν ένα μηχανικό στερεό, όπως είδαμε στην παράγραφο Ε, (β), το έργο των εσωτερικών δυνάμεων μεταξύ των δομικών του λίθων είναι μηδενικό.

Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή η $K'$ της σχέσης (20) εκφράζει το μέρος της κινητικής ενέργειας του στερεού που οφείλεται στην περιστροφή του ως προς CM. Πράγματι, αν θεωρήσουμε για απλότητα ένα στερεό που κάνει επίπεδη κίνηση, τότε ισχύει:

$$K' = \sum_{\mathrm{i}} \tfrac{1}{2} m_{\mathrm{i}} \upsilon_{\mathrm{i}}'^2 = \sum_{\mathrm{i}} \tfrac{1}{2} m_{\mathrm{i}} (\omega r_{\mathrm{i}}')^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} r_{\mathrm{i}}'^2\right)\omega^2 = \tfrac{1}{2} I_C \omega^2 = K_{\sigma\tau\rho}$$

και η (20) παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{K = K_C + K_{\sigma\tau\rho}} \quad (30)$$

Έτσι οι σχέσεις (27) (26) και (29) γίνονται αντίστοιχα:

$$\boxed{W_{\varepsilon\xi} = \Delta \mathrm{K}} \ (30) \qquad \boxed{W_C = \Delta K_C} \ (31) \qquad \text{και} \quad W'_{\varepsilon\xi} = \Delta K_{\sigma\tau\rho} \ (32)$$

Ακόμα, η ποσότητα $W'_{\varepsilon\xi}$ (το έργο δηλαδή των δυνάμεων ως προς το κέντρο μάζας του στερεού) μπορεί να εκφραστεί και ως το συνολικό έργο των ροπών των δυνάμεων ως προς το C:

$$W'_{\varepsilon\xi} = \sum_{\mathrm{i}} \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_{\mathrm{i}} \cdot \vec{\upsilon}'_{\mathrm{i}} \mathrm{d}t = \sum_{\mathrm{i}} \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_{\mathrm{i}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\mathrm{i}}) \mathrm{d}t = \sum_{\mathrm{i}} \int_{t_1}^{t_2} \vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}'_{\mathrm{i}} \times \vec{f}_{\mathrm{i}}\right) \mathrm{d}t = \sum_{\mathrm{i}} \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_{\mathrm{i}C} \cdot \vec{\omega} \, \mathrm{d}t$$

ή και $W'_{\varepsilon\xi} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_C \cdot \vec{\omega} \, \mathrm{d}t = W_{\tau C}$ όπου $\vec{\tau}_C$ η συνισταμένη ροπή ως προς το C.

Οπότε το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό είναι: $\boxed{W_{\varepsilon\xi} = W_C + W_{\tau C}}$ (33)

και η (32) γίνεται: $\boxed{W_{\tau C} = \Delta K_{\sigma\tau\rho}}$ (34)

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τα πιο πάνω προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα για τη χρήση του ΘΜΚΕ

### 1) *Υλικό σημείο*

Οι μορφές $W = \Delta K$ και $\sum W_{\mathrm{i}} = \Delta K$ (όπου $W$ το έργο της συνισταμένης δύναμης $\vec{F}$) είναι ισοδύναμες για το υλικό σημείο. Η κινητική του ενέργεια μεταβάλλεται μέσω του συνολικού έργου των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό. Αν $\vec{F} = 0$ τότε και $\Delta K = 0$.

### 2) *Σύστημα σωματιδίων*

Το συνολικό έργο $W_{\varepsilon\xi}$ των εξωτερικών δυνάμεων δεν είναι ίσο με το έργο $W_C$ της συνισταμένης τους $\vec{F}$, ασκουμένης στο C, αλλά ισχύει $W_{\varepsilon\xi} = W_C + W'_{\varepsilon\xi}$ όπου $W'_{\varepsilon\xi}$ το έργο τους ως προς το κέντρο μάζας.

Το συνολικό έργο των εσωτερικών δυνάμεων $W_{\varepsilon\sigma}$ είναι επίσης διάφορο γενικά του μηδενός και ίδιο για κάθε παρατηρητή.

Η συνθήκη $\vec{F} = 0$ (μονωμένο σύστημα) δεν εξασφαλίζει ότι το σύστημα είναι και ενεργειακά κλειστό, παρά μόνο ότι δεν μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια $K_C$ του κέντρου μάζας C.

Μπορεί όμως να μεταβάλλεται η «εσωτερική» κινητική ενέργεια $K'$ (ως προς το C). Και η μεταβολή της μπορεί να προέρχεται είτε από τις εσωτερικές δυνάμεις (εσωτερικές μετατροπές ενέργειας) είτε από τις εξωτερικές.

Το ΘΜΚΕ για το κέντρο μάζας έχει τη μορφή $W_C = \Delta K_C$

ενώ για το σύστημα $W_{\varepsilon\xi} + W_{\varepsilon\sigma} = \Delta K$ ή και $W_C + W'_{\varepsilon\xi} + W_{\varepsilon\sigma} = \Delta K_C + \Delta K'$.

### 3) *Μηχανικό στερεό*

Στην περίπτωση του ιδανικού στερεού είναι $W_{\varepsilon\sigma} = 0$, $K' = K_{\sigma\tau\rho}$ και $W'_{\varepsilon\xi} = W_{\tau C}$

Έτσι το ΘΜΚΕ για το στερεό έχει τη μορφή $W_{\varepsilon\xi} = \Delta K$

η οποία μπορεί να γραφτεί και επιμεριστικά $W_C = \Delta K_C$ και $W_{\tau C} = \Delta K_{\sigma\tau\rho}$.

Αν είναι $\vec{F} = 0$ και $\vec{\tau}_C = 0$ τότε το στερεό είναι και ενεργειακά αποκλεισμένο από το περιβάλλον.

*Διονύσης Μητρόπουλος*