# ΣΥΣΤΗΜΑ ν ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ, ΣΤΕΡΕΟ ΣΩΜΑ
# 2$^{ΟΣ}$ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ

## *Ένα σωματίδιο, Ορμή, Στροφορμή*
## *Ο 2$^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα σε αδρανειακό και μη αδρανειακό σύστημα*

● Γνωρίζουμε ότι η ορμή ενός σωματιδίου μάζας **m** σε κάποιο σύστημα (Oxyz), που θα το λέμε για ευκολία (Ο), ορίζεται ως $\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon}}$ *(1)*. Αν το σύστημα είναι ***αδρανειακό***, ο 2$^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα έχει για το σωματίδιο τη μορφή $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ *(2)*, όπου $\vec{F}$ η συνολική δύναμη που ασκείται σ' αυτό ή και, δεδομένου ότι το σωματίδιο έχει σταθερή μάζα, $\boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}}$ ή $\boxed{\vec{F} = m\vec{\alpha}}$ *(3)*.

---

● Επίσης, η στροφορμή του σωματιδίου ορίζεται ως $\boxed{\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{\upsilon}}$ *(4)* (δηλαδή η ροπή της ορμής του), όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του στο (Ο). Αν πάλι το σύστημα είναι ***αδρανειακό***, ο 2$^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα μπορεί να πάρει και τη μορφή $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ *(5)*, όπου $\vec{\tau}$ η ροπή της συνολικής δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στο σωματίδιο. Δεδομένου τώρα ότι η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί $\boxed{\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}}$, φαίνεται ότι οι δύο μορφές του 2$^{ου}$ νόμου *(3)* και *(5)* για ένα σωματίδιο είναι ισοδύναμες.

---

● Ας προσπαθήσουμε τώρα να γράψουμε τον 2$^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα για το σωματίδιο, ως προς ένα ***μη αδρανειακό*** σύστημα (Ο΄x΄y΄z΄), ή για ευκολία (Ο΄), που επιταχύνεται ως προς το αδρανειακό (Ο) με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_0$. Αν είναι $\vec{\upsilon}$, $\vec{\upsilon}'$ οι ταχύτητες του σωματιδίου ως προς τα (Ο), (Ο΄) αντίστοιχα και $\vec{\upsilon}_0$ η ταχύτητα του (Ο΄) ως προς το (Ο) τότε ισχύει:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0 \;\rightarrow\; \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}'}{dt} + \frac{d\vec{\upsilon}_0}{dt} \;\rightarrow\; m\vec{\alpha} = m\vec{\alpha}' + m\vec{\alpha}_0 \;\rightarrow\; \boxed{\vec{F} - m\vec{\alpha}_0 = m\vec{\alpha}'} \; (6)$$

όπου $\vec{F}$ η συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο. Παρατηρήστε ότι ο όρος $-m\vec{\alpha}_0$ εκφράζει την αδρανειακή δύναμη D' Alembert που δέχεται το σωματίδιο στο σύστημα (Ο΄), επομένως ο 2$^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα μπορεί να πάρει και τη γνωστή εναλλακτική μορφή: $\boxed{\vec{F} + \vec{F}_{αδραν.} = m\vec{\alpha}'}$ *(7)*.

Από τη σχέση αυτή μπορεί να προκύψει και η άλλη (ισοδύναμη για ένα σωματίδιο) μορφή του 2$^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα:

$$\boxed{\vec{r}'\times(\vec{F} + \vec{F}_{αδραν.}) = \vec{r}'\times m\vec{\alpha}'} \;\rightarrow\; \boxed{\vec{r}'\times\vec{F} + \vec{r}'\times\vec{F}_{αδραν.} = \vec{r}'\times m\frac{d\vec{\upsilon}'}{dt}} \;\rightarrow$$

$$\vec{\tau}'_{(O')} + \vec{\tau}'_{\alpha\delta\rho\alpha\nu.(O')} = \left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{(O')} \quad \textit{(8)}$$

όπου $\vec{r}'$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου στο μη αδρανειακό σύστημα (Ο΄), $\vec{\tau}'_{(O')}$ και $\vec{\tau}'_{\alpha\delta\rho\alpha\nu.(O')}$ οι ροπές στο (Ο΄) της συνολικής πραγματικής και της αδρανειακής δύναμης που ασκούνται στο σωματίδιο και το $2^{o}$ μέλος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σωματιδίου στο (Ο΄).

***ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ***

***(i)*** Προσέξτε ότι το μη αδρανειακό σύστημα (Ο΄) γενικά δεν είναι «προσαρτημένο» στο σωματίδιο, το οποίο έχει επιτάχυνση $\vec{\alpha}'$ ως προς το (Ο΄). Αν όμως υποθέσουμε ότι το σωματίδιο είναι ακίνητο ως προς το (Ο΄), τότε καταλήγουμε σε συνθήκη ισορροπίας που περιλαμβάνει φυσικά και τη δύναμη D’ Alembert.

***(ii)*** Η σχέση *(8)* βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με σχέση που συναντάμε, για την κίνηση ενός σωματιδίου ως προς μη αδρανειακό σύστημα, στη βιβλιογραφία, κατά τη μελέτη συστήματος υλικών σημείων:

$$\Sigma\vec{\tau}_{(O')} = \left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{(O')} - \vec{\alpha}_0 \times m\vec{r}' \quad \textit{(9)}$$

Πράγματι:

Ο όρος $-\vec{\alpha}_0 \times m\vec{r}'$ του $2^{ου}$ μέλους της σχέσης *(9)* μπορεί να γραφεί $-(-m\vec{r}' \times \vec{\alpha}_0)$ ή αλλιώς $-\vec{r}' \times (-m\vec{\alpha}_0)$ και αν τον μεταφέρουμε στο $1^{o}$ μέλος παίρνουμε τη σχέση *(8)*.

## *Σύστημα ν σωματιδίων, Ορμή συστήματος, Στροφορμή συστήματος*
## *Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα σε αδρανειακό και μη αδρανειακό σύστημα*

● Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε **ν** σωματίδια $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, …, $\mathbf{m_\nu}$ που βρίσκονται στις θέσεις $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, ..., \vec{\mathbf{r}}_\nu$ στο ***αδρανειακό*** σύστημα (Oxyz).

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για οποιοδήποτε από αυτά έχουμε:

$\vec{\mathbf{F}}_i + \sum_{k=1}^{\nu} \vec{\mathbf{F}}_{ik} = \mathbf{m}_i \vec{\boldsymbol{\alpha}}_i$ όπου $\vec{\mathbf{F}}_i$ είναι η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο $\mathbf{m_i}$ και $\vec{\mathbf{F}}_{ik}$ είναι οι αλληλεπιδράσεις πάνω του από όλα τα σωματίδια. Αθροίζοντας για όλα τα σωματίδια, παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \vec{\mathbf{F}}_i + \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} \vec{\mathbf{F}}_{ik} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\boldsymbol{\alpha}}_i$$

Η σχέση αυτή μετά την απλοποίηση των ζευγαριών δράσης – αντίδρασης γίνεται:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\nu} \vec{\mathbf{F}}_i = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\boldsymbol{\alpha}}_i} \quad \textit{(10)}$$

Το δεύτερο μέλος όμως σχετίζεται με το κέντρο μάζας του συστήματος που ορίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}_{cm} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_i} \quad \text{ή} \quad \boxed{\mathbf{M} \cdot \vec{\mathbf{r}}_{cm} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_i} \quad \textit{(11)}$$

όπου **M** η συνολική μάζα των **ν** σωματιδίων.

Με την πρώτη παραγώγιση της ***(11)*** προκύπτει ότι το κέντρο μάζας του συστήματος των **ν** σωματιδίων κινείται ως ένα υλικό σημείο μάζας **M** που η συνολική ορμή του συστήματος εφαρμόζεται σ' αυτό και είναι: $\boxed{\mathbf{M} \cdot \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_{cm} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i}$ ***(12)***

Με τη δεύτερη παραγώγιση τέλος και με αντικατάσταση στη ***(10)*** προκύπτει για τη συνισταμένη $\vec{\mathbf{F}}$ των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα (αδιάφορο σε ποια τα σωματίδια ασκούνται) και για το κέντρο μάζας του ο 2ος νόμος του Νεύτωνα:

$\boxed{\mathbf{M} \cdot \vec{\boldsymbol{\alpha}}_{cm} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\boldsymbol{\alpha}}_i}$ και τελικά η ***(10)*** γίνεται $\boxed{\sum_{i=1}^{\nu} \vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{M} \cdot \vec{\boldsymbol{\alpha}}_{cm}}$ ή $\boxed{\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{M} \cdot \vec{\boldsymbol{\alpha}}_{cm}}$ ***(13)***

---

● Ας προσπαθήσουμε τώρα να γράψουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα στη γενικότερη μορφή του, με τις ροπές των δυνάμεων.

Ξεκινάμε πάλι από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για τυχαίο σωματίδιο:

$\vec{\mathbf{F}}_i + \sum_{k=1}^{\nu} \vec{\mathbf{F}}_{ik} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}(\mathbf{m}_i \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i)$ και παίρνουμε τις ροπές και των δύο μελών ως προς την αρχή του συστήματος (O): $\vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i + \sum_{k=1}^{\nu} \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_{ik} = \vec{\mathbf{r}}_i \times \frac{\mathbf{d}(\mathbf{m}_i \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i)}{\mathbf{dt}}$ ή αλλιώς:

$$\vec{\tau}_i + \sum_{k=1}^{\nu} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i)$$

Αθροίζουμε για όλα τα σωματίδια:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \vec{\tau}_i + \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\nu} \vec{L}_i$$

Και μετά την απλοποίηση των ροπών των ζευγαριών δράσης – αντίδρασης:

$$\boxed{\vec{\tau}_{(O)} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O)}} \quad (14)$$

***ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ***

***(i)*** Η επιλογή της αρχής Ο ήταν αυθαίρετη, έτσι η σχέση ***(14)*** ισχύει για οποιοδήποτε σημείο του ***αδρανειακού*** συστήματος αναφοράς (Ο):

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad (15)$$

***(ii)*** Στροφορμή συστήματος και κέντρο μάζας:

Η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος των σωματιδίων ως προς οποιοδήποτε σημείο του αδρανειακού συστήματος, π.χ. ως προς την αρχή Ο, είναι όπως είδαμε:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{\nu} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{\nu} \vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{\nu} m_i (\vec{r}_{cm} + \vec{r}_i') \times (\dot{\vec{r}}_{cm} + \dot{\vec{r}}_i),$$

όπου $\vec{r}_i'$ είναι τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος. Μετά τις πράξεις στο τελευταίο μέλος προκύπτει:

$$\boxed{\vec{L} = M\vec{r}_{cm} \times \dot{\vec{r}}_{cm} + \sum_{i=1}^{\nu} m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i'} \quad \text{ή αλλιώς} \quad \boxed{\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}'} \quad (16)$$

Οι δύο όροι του δεύτερου μέλους αντιστοιχούν στην ***στροφορμή του κέντρου μάζας του συστήματος ως προς το αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο Ο*** του αδρανειακού συστήματος και στην ***στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του***.

Όπως αναφέρει ο Becker, η επιλογή του σημείου Ο είναι αυθαίρετη. Η σχέση ***(16)*** πάντως έχει πρακτικά αξία, αν μπορεί να εφαρμοστεί ο γενικευμένος νόμος ***(15)*** στο σημείο αυτό.

Αν το καταλαβαίνω καλά, αυτό σημαίνει ότι για οποιοδήποτε σημείο Ο του αδρανειακού συστήματος ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{\vec{\tau}_{(O)} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O)}} \leftrightarrow \boxed{\vec{\tau}_{(O)} = \left(\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}\right)_{(O)} + \left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{(cm)}} \quad (17)$$

● Τέλος, ας προσπαθήσουμε να γράψουμε κι εδώ τον $2^o$ νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα των σωματιδίων, ως προς ένα ***μη αδρανειακό*** σύστημα (Ο΄x΄y΄z΄), ή για ευκολία (Ο΄), που επιταχύνεται ως προς το αδρανειακό (Ο) με επιτάχυνση $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_0$.

Η συνολική ροπή που δέχονται τα σωματίδια ως προς (Ο΄) είναι:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\tau}}'_{(O')} = \sum_{i=1}^{\nu} \vec{\mathbf{r}}_i' \times \vec{\mathbf{F}}_i} \quad \textit{(17)}$$

όπου $\vec{\mathbf{r}}_i'$ είναι τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων ως προς το (Ο΄). Χρησιμοποιούμε το $2^o$ νόμο του Νεύτωνα για κάθε σωματίδιο, τους μετασχηματισμούς $\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{r}}_i'$ και $\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i = \dot{\vec{\mathbf{r}}}_0 + \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i'$ και η *(17)* γίνεται:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}'_{(O')} = \sum_{i=1}^{\nu} \vec{\mathbf{r}}_i' \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \mathbf{m}_i (\dot{\vec{\mathbf{r}}}_0 + \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i') = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_i' \times (\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0 + \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_i') = \sum_{i=1}^{\nu} (-\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0 \times \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_i') + \sum_{i=1}^{\nu} \vec{\mathbf{r}}_i' \times \mathbf{m}_i \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_i' \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\tau}}'_{(O')} = -\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0 \times \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_i' + \sum_{i=1}^{\nu} \vec{\mathbf{r}}_i' \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} (\mathbf{m}_i \vec{\boldsymbol{\upsilon}}_i')} \quad \textit{(18)}$$

Ισχύει $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0 = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_0$ και ο τελευταίος όρος στο δεξιό μέλος είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς το (Ο΄) οπότε η (18) γίνεται:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\tau}}'_{(O')} = -\vec{\boldsymbol{\alpha}}_0 \times \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_i' + \left( \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{L}}'}{\mathbf{dt}} \right)_{(O')}} \quad \textit{(18)}$$

***<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>***

Αυτή ακριβώς την τελευταία σχέση:

$$\boxed{\boldsymbol{\Sigma}\vec{\boldsymbol{\tau}}_{(O')} = \left( \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{L}}'}{\mathbf{dt}} \right)_{(O')} - \vec{\boldsymbol{\alpha}}_0 \times \sum_{i=1}^{N} \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_i'} \quad \textit{(19)}$$

τη συναντάμε στη βιβλιογραφία ως επέκταση του γενικευμένου $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα κατά τον όρο $-\vec{\boldsymbol{\alpha}}_0 \times \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_i'$ για τη χρήση του σε μη αδρανειακά συστήματα.

Αναφέρονται ***τρεις περιπτώσεις όπου ο όρος αυτός μηδενίζεται***, οπότε ο νόμος του Νεύτωνα παίρνει την κανονική μορφή του:

1) Προφανώς όταν $\boxed{\vec{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \mathbf{0}}$, οπότε το (Ο΄) εκφυλίζεται σε αδρανειακό σύστημα.

2) Όταν το σημείο Ο΄ συμπίπτει με το κέντρο μάζας του συστήματος, οπότε:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m}_i \vec{\mathbf{r}}_i' = \mathbf{0}}$$

3) Δεδομένου ότι για το άθροισμα αυτό ισχύει: $\sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{m_i \vec{r}_i'} = \mathbf{M\vec{r}'_{cm}}$, όπου $\mathbf{\vec{r}'_{cm}}$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας στο σύστημα (Ο΄) και Μ η μάζα του συστήματος, καταλαβαίνουμε ότι ο φορέας του $\mathbf{\vec{r}'_{cm}}$ είναι η ευθεία που ενώνει το Ο΄ με το κέντρο μάζας. Αν λοιπόν και η επιτάχυνση $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{0}}$ του σημείου Ο΄ έχει τον ίδιο φορέα, διέρχεται δηλαδή κι αυτή από το κέντρο μάζας, τότε το εξωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων είναι μηδέν οπότε μηδενίζεται πάλι ο εν λόγω όρος.

*Στερεό σώμα και επίπεδη κίνηση. Ορμή και Στροφορμή στερεού.*
*Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για την επίπεδη κίνηση του στερεού σε αδρανειακό και μη αδρανειακό σύστημα.*

● Κατά την επίπεδη κίνηση ενός στερεού θεωρούμε ότι κινείται με τέτοιο τρόπο ώστε όλα του τα σημεία να κινούνται σε παράλληλα επίπεδα. Έτσι το κέντρο μάζας του κινείται πάνω σε ορισμένο επίπεδο (κίνηση δύο διαστάσεων, ***μεταφορά***), πάνω στο οποίο βρίσκονται και όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό (ομοεπίπεδες). Ο άξονας γύρω από τον οποίο στρέφεται το στερεό (***περιστροφή***) είναι κάθετος στο εν λόγω επίπεδο και διατηρεί σταθερό τον προσανατολισμό του αφού όλες οι δυνάμεις μπορούν να προκαλέσουν μόνο ροπές κατά τη διεύθυνσή του.

Για την μεταφορά του στερεού ισχύει $\boxed{\vec{p} = M\vec{\upsilon}_{cm}}$ με σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας του και ο 2ος νόμος του Νεύτωνα έχει τη γνωστή μορφή:

$$\boxed{\vec{F} = M\vec{\alpha}_{cm}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\vec{F}_y = M\vec{\alpha}_{cm,y} \\ \vec{F}_x = M\vec{\alpha}_{cm,x}\end{array}} \text{ (ή } \vec{F}_y = \mathbf{0} \text{ αν η κίνηση είναι ευθύγραμμη)} \qquad \textit{(20)}$$

● Ας πάμε τώρα να γράψουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα στη γενικότερη μορφή του με τις ροπές των δυνάμεων και για το στερεό σώμα.

Κατά τη μελέτη συστήματος **ν** σωματιδίων πιο πριν για ***αδρανειακό*** σύστημα αναφοράς, είχαμε καταλήξει στη σχέση ***(15)***, ως προς οποιοδήποτε σημείο του αδρανειακού συστήματος:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad \textit{(15)}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιήσαμε τη σχέση ***(16α)***: $\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}'}$ για να γράψουμε την ισοδυναμία ***(17)***:

$$\boxed{\vec{\tau}_{(O)} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(O)}} \leftrightarrow \boxed{\vec{\tau}_{(O)} = \left(\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}\right)_{(O)} + \left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{(cm)}} \quad \textit{(17α)}$$

Η ***(16)*** μας πληροφορεί ότι: ***Η στροφορμή ενός συστήματος ως προς οποιοδήποτε σημείο Ο αδρανειακού συστήματος μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα της στροφορμής του κέντρου μάζας του ως προς το Ο συν της στροφορμής του ως προς το κέντρο μάζας του.***

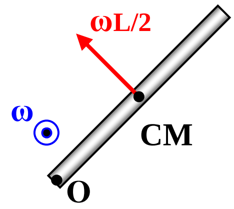
Ας δούμε την πρόταση αυτή λίγο πιο αναλυτικά:

***(i)*** Αν ***το σημείο Ο είναι κάποιο σταθερό σημείο*** και ***συμπίπτει με το CM***, έχουμε δηλαδή σταθερό άξονα περιστροφής που διέρχεται από το CM, τότε η στροφορμή του CM είναι μηδενική, οπότε η ***(17)*** εκφυλίζεται στη γνωστή μας σχέση:

$$\boxed{\vec{\tau}_{(cm)} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{(cm)}} \quad \textit{(17β)}$$

***(ii)*** Αν ***το σημείο Ο <u>δεν συμπίπτει</u> με το CM***, αλλά ***είναι κάποιο σταθερό σημείο*** γύρω από το οποίο περιστρέφεται το στερεό (από το οποίο θα διέρχεται και ο αντίστοιχος άξονας) τότε ικανοποιείται έμμεσα η σχέση ***(16)*** αφού χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Steiner!

Ας δούμε ένα παράδειγμα για να γίνει πιο κατανοητό:




Η στροφορμή της ράβδου του σχήματος ως προς το σταθερό σημείο Ο είναι:

$$\mathbf{L_{(O)} = I_{(O)} \cdot \omega = \left(I_{(CM)} + M\frac{L^2}{4}\right) \cdot \omega = \left(M\frac{L^2}{12} + M\frac{L^2}{4}\right) \cdot \omega = \frac{ML^2\omega}{3}}$$

Εναλλακτικά:

$$\mathbf{L_{(O)} = L_{cm,(O)} + L_{(CM)} = r_{cm}M\upsilon_{cm} + I_{(CM)}\omega = \frac{L}{2}M\omega\frac{L}{2} + M\frac{L^2}{12}\omega = \frac{ML^2\omega}{3}}$$

Η γωνιακή της επιβράδυνση τη στιγμή αυτή είναι:

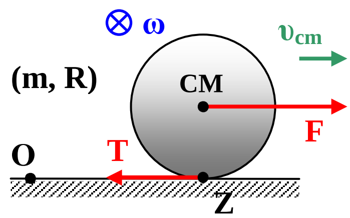
$$\mathbf{\tau_{(O)} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{(O)} \rightarrow Mgx = I_{(O)}\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Mgx = \frac{ML^2}{3}\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \ldots}$$

Εναλλακτικά:

$$\mathbf{\tau_{(O)} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{(O)} \rightarrow Mgx = \left(\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}\right)_{(O)} + \left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{(cm)} \rightarrow Mgx = r_{cm}M\alpha_{cm} + I_{(CM)}\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow}$$

$$\mathbf{Mgx = \frac{L}{2}M\alpha_{\gamma\omega\nu}\frac{L}{2} + \frac{ML^2}{12}\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow Mgx = \frac{ML^2}{3}\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \ldots}$$

***(iii)*** Γενικότερα τέλος, το Ο μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο του αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Ας το δούμε πάλι με ένα παράδειγμα:




Ο κύλινδρος του διπλανού σχήματος κυλίεται χωρίς / με ολίσθηση με την επίδραση οριζόντιας δύναμης F. Να βρείτε την γωνιακή και τη μεταφορική του επιτάχυνση.

<u>Απάντηση</u>: ο κύλινδρος κάνει επιταχυνόμενη μεταφορική και στροφική κίνηση.

Αν κυλίεται χωρίς ολίσθηση, η τριβή **Τ** θα είναι στατική και: $\boxed{\mathbf{\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R}}$ **— 01**

Αν αντίθετα υπάρχει και ολίσθηση τότε θα έχουμε τριβή ολίσθησης: $\boxed{\mathbf{T = \mu N}}$ **— 02**

Από τη μεταφορική κίνηση θα έχουμε:

$\mathbf{\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow}$ $\boxed{\mathbf{F - T = m \cdot \alpha_{cm}}}$ **— 03**

$\mathbf{\Sigma F_y = 0 \rightarrow}$ $\boxed{\mathbf{N = m \cdot g}}$ **— 04**

Από τη στροφική κίνηση τώρα έχουμε:

($1^{ος}$ τρόπος, ως προς το CM)

$$\mathbf{\tau_{(CM)} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{(CM)} \rightarrow TR = I_{(CM)}\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow TR = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu}}} \ \textbf{— 05}$$

($2^{ος}$ τρόπος, ως προς τυχαίο ακίνητο σημείο Ο του δαπέδου)

$$\tau_{(O)} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{(O)} \rightarrow FR = \left(\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}\right)_{(O)} + \left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{(cm)} \rightarrow FR = r_{cm} m\alpha_{cm} + I_{(CM)}\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$FR = Rm\alpha_{cm} + \frac{MR^2}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \boxed{F = m\alpha_{cm} + \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu}} \text{ — } \mathbf{06}$$

● Παρατηρείστε ότι οι δύο τελευταίες **05** και **06** είναι ισοδύναμες, αφού από τη μία μπορεί να προκύψει η άλλη (με τη βοήθεια και της **03**)

● Παρατηρείστε ακόμα ότι η **06** προκύπτει με την εφαρμογή του 2$^{ου}$ νόμου σε αδρανειακό σύστημα.

Η **05** όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι προκύπτει από την εφαρμογή του ίδιου νόμου είτε σε αδρανειακό είτε σε μη αδρανειακό σύστημα!

Αν εφαρμόσουμε τον νόμο <u>ως προς το (ακίνητο) σημείο του χώρου από το οποίο διέρχεται τη στιγμή αυτή το κέντρο μάζας</u> (αδρανειακό σύστημα), τότε χρησιμοποιούμε την εξίσωση ***(17α)*** και μάλιστα την υποπερίπτωση ***(17β)***.

Αν όμως εφαρμόσουμε τον νόμο <u>ως προς το (επιταχυνόμενο) κέντρο μάζας</u> (μη αδρανειακό σύστημα) τότε χρησιμοποιούμε την εξίσωση ***(19)*** με την παρατήρηση 2 σε ισχύ.

---

● Το τελευταίο με το οποίο θα ασχοληθούμε θα είναι να σχολιάσουμε λίγο την εφαρμογή του 2$^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα στην επίπεδη κίνηση του στερεού, ως προς ένα ***μη αδρανειακό*** σύστημα (O΄x΄y΄z΄), ή για ευκολία (O΄), που επιταχύνεται ως προς το αδρανειακό (O) με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_0$.

Μεταφέρω τη σχέση ***(19)*** που είχαμε βρει στην αντίστοιχη περίπτωση του συστήματος σωματιδίων:

$$\boxed{\vec{\tau}'_{(O')} = -\vec{\alpha}_0 \times \sum_{i=1}^{\nu} m_i \vec{r}'_i + \left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{(O')}} \quad \mathbf{(19\alpha)}$$

Γνωρίζουμε κατ' αρχήν ότι ισχύει $\sum_{i=1}^{\nu} m_i \vec{r}'_i = M\vec{r}'_{cm}$ όπου $\vec{r}'_{cm}$ είναι το διάνυσμα θέσης του CM στο σύστημα (O΄) και M η μάζα του στερεού.

Επομένως, ο όρος $-\vec{\alpha}_0 \times \sum_{i=1}^{\nu} m_i \vec{r}'_i$ μπορεί να γίνει:

$$-\vec{\alpha}_0 \times \sum_{i=1}^{\nu} m_i \vec{r}'_i = -\vec{\alpha}_0 \times M\vec{r}'_{cm} = -\vec{r}'_{cm} \times (-M\vec{\alpha}_0)$$

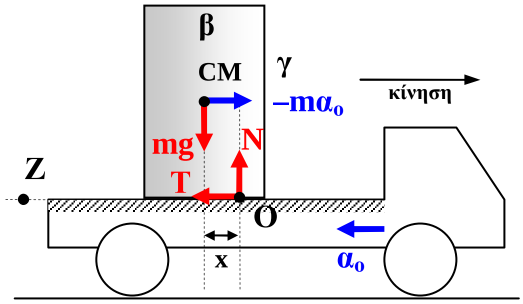
Αν δηλαδή εισάγουμε πάλι την έννοια της αδρανειακής δύναμης D'Alembert, η οποία ασκείται στο κέντρο μάζας του σώματος, ο εν λόγω όρος εκφράζει τη ροπή αυτής της δύναμης ως προς το σημείο O΄.

Η σχέση ***(19α)*** μπορεί λοιπόν να γραφεί:

$$\boxed{\vec{\tau}'_{(O')} = -\vec{r}'_{cm} \times (-M\vec{\alpha}_0) + \left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{(O')}} \quad \text{ή αλλιώς} \quad \boxed{\vec{\tau}'_{(O')} + \vec{\tau}'_{\alpha\delta\rho\alpha\nu.(O')} = \left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{(O')}} \quad \mathbf{(20)}$$

Για να κλείσουμε, ας δούμε σαν τελευταίο παράδειγμα, εναλλακτικούς τρόπους λύσης για την πολύ καλή άσκηση του Ξενοφώντα (με το φορτηγό που επιβραδύνεται και το κιβώτιο που τείνει να γλιστρήσει προς τα εμπρός, ή να ανατραπεί.

(http://ylikonet.gr/profiles/blogs/isorropia-stereoy-somatos-kai)




Λόγω της επιβραδυνόμενης με $\vec{\alpha}_0$ μεταφοράς του κιβωτίου έχουμε:

$\mathbf{\Sigma F_x = m{\cdot}\alpha_{cm} \rightarrow \boxed{-T = -m{\cdot}\alpha_{cm}} \rightarrow \boxed{T = m{\cdot}\alpha_0}}$ — **01**

$\mathbf{\Sigma F_y = 0 \rightarrow \boxed{N = m{\cdot}g}}$ — **02**

Στο μη αδρανειακό σύστημα του φορτηγού το κιβώτιο ισορροπεί, επομένως ως προς το σημείο Ο όπου εφαρμόζεται η Ν έχουμε:

$$\mathbf{\Sigma\tau + \Sigma\tau_{\alpha\delta\rho\alpha\nu.} = 0 \rightarrow -mgx - m\alpha_o\gamma/2 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{\gamma}{2x}|\alpha_o|}} \text{ — } \mathbf{03}$$

Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε τον γενικευμένο 2$^{o}$ νόμο ως προς (ακίνητο) σημείο του χώρου, π.χ. ως προς το Ζ (αδρανειακό σύστημα) που να βρίσκεται στο ίδιο ύψος από το έδαφος με το σημείο Ο (ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος ως προς Ζ δεν είναι μηδενικός, παρόλο που δεν περιστρέφεται, διότι μεταβάλλεται η ταχύτητα του CM !!):

$$\mathbf{\Sigma\tau_{(Z)} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{(Z)} \rightarrow -N(ZO) + mg[(ZO) - x] = \left(\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}\right)_{(Z)} + \cancel{\left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{(CM)}} \xrightarrow{N=mg}}$$

$$\mathbf{\Sigma\tau_{(Z)} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{(Z)} \rightarrow -mgx = -r_{cm}m|\alpha_0| \rightarrow gx = |\alpha_0|\gamma/2 \rightarrow \boxed{x = \frac{\gamma}{2x}|\alpha_o|}} \text{ — } \mathbf{03}$$

Συνθήκη μη ανατροπής: $\boxed{\mathbf{x \le \beta/2}}$ — **04**

Συνθήκη μη ολίσθησης: $\boxed{\mathbf{T \le \mu N}}$ — **05**

(Οι ισότητες οριακά)

Και ούτω καθεξής …

***Διονύσης Μητρόπουλος***